Sur la quantité de nombres économiques

Jean-Marie De Koninck, Nicolas Doyon et Florian Luca

Édition du 30 octobre 2006

§1. Introduction

En 1995, Bernardo Recamán Santos [8] a défini un *nombre économique* comme étant un entier positif dont la factorisation ne requiert pas plus de chiffres que sa représentation décimale. Ainsi, $25 = 5^2$ est un nombre économique en base 10. De manière analogue, on a introduit la notion de *nombre économique* en base $B \geq 2$. Par ailleurs, on dit qu'un nombre est *fortement économique* en base B si sa factorisation nécessite moins de chiffres que son écriture en base B. Par exemple, $125 = 5^3$ est un nombre fortement économique en base 10.

Répondant à une question posée par Santos [8], De Koninck et Luca [4] ont démontré qu'il existe des suites arbitrairement longues de nombres fortement économiques consécutifs, un résultat déjà obtenu par Pinch [7] mais sous la condition de la conjecture des nombres premiers jumeaux généralisée. Récemment, De Koninck et Luca [3] ont obtenu des bornes inférieure et supérieure pour la fonction $N_B(x)$, soit la quantité de nombres fortement économiques n'excédant pas x. Nous améliorons ces bornes en obtenant une formule asymptotique pour la quantité $\log x - \log N_B(x)$.

§2. Le résultat principal

Dans tout ce qui suit, B est un entier ≥ 2, x est un grand nombre réel et p désigne toujours un nombre premier. Pour chaque entier $n \geq 2$, on désigne respectivement par $\omega(n)$ et $\Omega(n)$ le nombre de facteurs premiers distincts de n et le nombre de facteurs premiers de n en comptant leur multiplicité. Enfin $\{x\}$ désigne la partie fractionnaire du nombre réel x.

Nous utilisons de plus les symboles $\gg$ et $\ll$ de Vinogradov ainsi que les symboles O et o de Landau avec leurs significations habituelles.

Introduisons la fonction R définie pour tout nombre réel α par

$$R(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \leq 0, \\ \displaystyle\min_{t>0} \frac{1-e^{-t}}{t} e^{\alpha t} & \text{si } 0 < \alpha < \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{si } \alpha \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

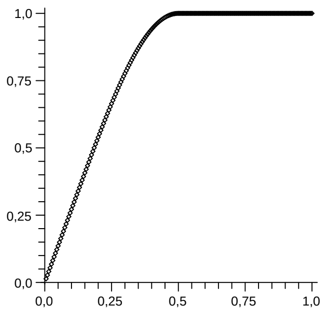
Il est clair que cette fonction est bien définie. Par ailleurs, soit $t_0(\alpha)$ la valeur de t qui minimise l'expression $\frac{1-e^{-t}}{t}e^{\alpha t}$. On constate alors que

$$t_0(\alpha) = (1 + o(1))\frac{1}{\alpha} \qquad (\alpha \to 0).$$

Il s'ensuit que $R(\alpha)$ est continue en $\alpha = 0$. D'autre part, comme il est clair que $R(\alpha)$ est continue en $\alpha = \frac{1}{2}$, on peut conclure que R est une fonction continue sur l'ensemble des nombres réels.

La figure 1 illustre la fonction $R(\alpha)$.

Figure 1: La fonction $R(\alpha)$



Notre résultat principal consiste en des bornes inférieure et supérieure pour la fonction $N_B(x)$.

Théorème. *Lorsque x tend vers l'infini,*

$$N_B(x) = \frac{x}{(\log x)^{K(B)+o(1)}}, \tag{1}$$

où

$$K(B) = \min_{\rho>0}\left(\min_{0<\beta<1}\left(1+\rho+\beta\left(\log\beta - 1 - \log(R(\rho/\beta\log B)\right)\right)\right).$$

En particulier, lorsque B tend vers l'infini,

$$K(B) = 1 - \frac{1+o(1)}{\log B}. \tag{2}$$

Voici d'ailleurs un tableau donnant quelques valeurs numériques de la fonction $K(B)$.

B	$K(B)$	B	$K(B)$
2	0,330	8	0,696
3	0,474	9	0,713
4	0,553	10	0,727
5	0,603	20	0,789
6	0,643	100	0,868
7	0,669	1000	0,909

§3. Les résultats préliminaires

On désigne par $d_B(n)$ le nombre de chiffres nécessaires à l'écriture de la factorisation de n en base B. On pose également $\gamma(1) = f_B(1) = 1$ et pour $n \geq 2$,

$$\gamma(n) := \prod_{p|n} p$$

et

$$f_B(n) := \sum_{p|n}\left(1 - \left\{\frac{\log p}{\log B}\right\}\right).$$

Avec ces notations, on obtient l'identité

$$\begin{aligned} d_B(n) &= \sum_{p\mid n} \left\lfloor \frac{\log p}{\log B} + 1 \right\rfloor + \sum_{\substack{p^a \| n \\ a\geq 2}} \left\lfloor \frac{\log a}{\log B} + 1 \right\rfloor \\ &= \frac{\log \gamma(n)}{\log B} + f_B(n) + \sum_{\substack{p^a \| n \\ a\geq 2}} \left\lfloor \frac{\log a}{\log B} + 1 \right\rfloor . \end{aligned} \tag{3}$$

À l'aide de cette identité, on peut démontrer les deux lemmes suivants qui sont des critères sur les nombres économiques utilisés par De Koninck et Luca [3].

Lemme 1. *Écrivons chaque entier $n \geq 2$ sous la forme $n = 2^a r$, où r est un nombre impair. La condition suivante est une condition suffisante pour que n soit un nombre économique.*

$$f_B(r) < \frac{a \log 2}{\log B} - 4 - \frac{\log\log n - \log\log 2}{\log B}.$$

Démonstration du lemme 1. Il est clair que

$$\begin{aligned} d_B(n) &\leq 2 + \left\lfloor \frac{\log a}{\log B} + 1 \right\rfloor + d_B(r) \\ &\leq 3 + \frac{\log a}{\log B} + \left\lfloor \frac{\log r}{\log B} + 1 \right\rfloor + f_B(r) \\ &\leq 4 + \frac{\log a}{\log B} + \frac{\log r}{\log B} + f_B(r). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que n est un nombre économique si

$$4 + \frac{\log a}{\log B} + \frac{\log r}{\log B} + f_B(r) \leq \frac{\log n}{\log B} = \frac{\log r + a \log 2}{\log B}.$$

Il en découle que n est un nombre économique si

$$f_B(r) \leq \frac{a \log 2}{\log B} - 4 - \frac{\log a}{\log B}$$

et le lemme 1 découle alors du fait que $a \leq \frac{\log n}{\log 2}$.

On pose

$$v = v(n) := \prod_{\substack{p^a \| n \\ a > 1}} p^a$$

et $u = u(n) := n/v$, de sorte que $v(n)$ est la partie puissante de n et $u(n)$ sa partie libre de carrés. On a alors le résultat suivant.

Lemme 2. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier positif n_0 tel que, pour tout $n > n_0$ avec $v(n) < (\log\log n)^2$, on a que n est fortement économique seulement si*

$$f_B(m) < \frac{1}{\log B} \left(\log v - \log \gamma(v)\right) + \varepsilon (\log\log\log n)^2. \tag{4}$$

Démonstration du lemme 2. De l'identité 3 on obtient

$$d_B(n) = \frac{\log(\gamma(n))}{\log B} + f_B(n) + \sum_{\substack{p^a \| n \\ a>1}} \left(\left\lfloor \frac{\log a}{\log B} \right\rfloor + 1 \right).$$

Observons d'une part que $\log\gamma(n) = \log n - \log v + \log\gamma(v)$ et d'autre part que $f_B(n) = f_B(m) + f_B(v) = f_B(m) + O(\frac{\log v}{\log\log v}) = f_B(m) + o(\log\log\log n)$. Pour établir cette dernière identité, on a utilisé l'hypothèse $v(n) < (\log\log n)^2$. Par ailleurs, toujours grâce à cette hypothèse,

$$\sum_{\substack{p^a \| n \\ a>1}} \left\lfloor \frac{\log a}{\log B} + 1 \right\rfloor = O(\omega(v)\log v) = o((\log\log\log n)^2).$$

Il s'ensuit que

$$d_B(n) = \frac{1}{\log B}(\log n - \log v + \log\gamma(v)) + f_B(m) + o((\log\log\log n)^2),$$

ce qui complète la démonstration du lemme 2.

Introduisons maintenant la notion d'indice de composition d'un entier positif n, lequel est désigné par la fonction $\lambda(n)$ définie par $\lambda(1) := 1$ et pour $n \geq 2$ par

$$\lambda(n) := \frac{\log n}{\log\gamma(n)}, \tag{5}$$

une fonction d'abord introduite par Jerzy Browkins dans [1].

Posons maintenant, pour chaque entier $j \geq 0$ et chaque nombre réel $\delta > 0$,

$$H_{j,\delta}(t) := \#\{n \leq t : 2 + j\delta \leq \lambda(n) \leq 2 + (j+1)\delta\}.$$

Lemme 3. *Pour j et δ fixés,*

$$H_{j,\delta}(t) = t^{1/(2+j\delta)+o(1)} \qquad (t \to \infty).$$

Démonstration du lemme 3. Voir De Koninck et Doyon [2].

Soit $G = G(k) = g_1 + g_2 + \ldots + g_k$ la somme de k variables aléatoires indépendantes chacune uniformément distribuée sur $[0, 1]$.

Lemme 4. *Soit α un nombre réel fixe. Pour tout entier positif k,*

$$P(G < \alpha k) \leq R(\alpha)^k. \tag{6}$$

De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C = C(\varepsilon, \alpha) > 0$ et un entier positif k_0 tels que pour tout $k \geq k_0$,

$$P(G < \alpha k) \geq \frac{1}{2} R(\alpha)^{k+(C+\varepsilon)k^{3/4}}. \tag{7}$$

Démonstration du lemme 4. D'abord, dans le cas $\alpha \leq 0$, on a trivialement

$$P(G < \alpha k) = P(G < 0) = 0 = R(\alpha)^k,$$

ce qui établit d'un seul coup les deux inégalités du lemme.

Soit donc $\alpha > 0$. Par symétrie, on a $P(G < \alpha k) = P(G > (1-\alpha)k)$, de sorte que $P(G < k/2) = P(G > k/2) = 1/2$. Si $\alpha \geq \frac{1}{2}$, on a donc $\frac{1}{2} \leq P(G < \alpha k) \leq 1$, de sorte que par la définition de R, on a $P(G < \alpha k) \leq 1 = (R(\alpha))^k$, ce qui établit (6). D'autre part, il est clair que $\frac{1}{2}(R(\alpha))^k = \frac{1}{2} \leq P(G < \alpha k)$, ce qui établit (7) dans le cas où $\alpha \geq \frac{1}{2}$.

Pour le reste de la preuve, nous supposerons donc que $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

Montrons d'abord (6).

Pour une variable aléatoire X, désignons par f_X la fonction de densité associée à X, et, étant donnée une fonction réelle h, nous désignons par $E[h(X)]$ l'espérance mathématique de $h(X)$.

En utilisant le fait que les variables aléatoires g_i, pour $i = 1, 2, \ldots, k$, sont indépendantes et identiquement distribuées, on a que pour tout nombre réel t,

$$\int_0^k e^{-tx} f_G(x)dx = E\left[e^{-tG}\right] = \left(E[e^{-tg_1}]\right)^k = \left(\frac{1-e^{-t}}{t}\right)^k. \tag{8}$$

Voilà qui permet d'écrire que pour tout $t > 0$,

$$P(G < \alpha k) = \int_0^{\alpha k} f_G(x)dx < e^{t\alpha k}\int_0^{\alpha k} e^{-tx} f_G(x)dx < \left(\frac{e^{\alpha t}(1-e^{-t})}{t}\right)^k.$$

Or, comme cette dernière inégalité tient pour tout nombre réel $t > 0$, il s'ensuit que

$$P(G < \alpha k) \leq \left(\min_{t>0}\left(\frac{e^{t\alpha}(1-e^{-t})}{t}\right)\right)^k = R(\alpha)^k, \tag{9}$$

ce qui prouve (6) lorsque $0 < \alpha < 1/2$.

Pour établir (7), nous allons d'abord borner la fonction de densité $f_G(x)$. De l'inégalité (9), il découle que pour tout $0 < \varepsilon < \alpha$,

$$\int_{(\alpha-\varepsilon)k}^{\alpha k} f_G(x)dx = P((\alpha-\varepsilon)k \leq G < \alpha k) \leq P(G < \alpha k) \leq R(\alpha)^k. \tag{10}$$

Par ailleurs, comme $f_G(x)$ est une fonction continue et croissante sur $[0, k/2]$, il s'ensuit que

$$\int_{(\alpha-\varepsilon)k}^{\alpha k} f_G(x)dx \geq \varepsilon k f_G((\alpha-\varepsilon)k). \tag{11}$$

En combinant (10) et (11), on en déduit que

$$\varepsilon k f_G((\alpha-\varepsilon)k) \leq R(\alpha)^k,$$

laquelle inégalité, en posant $\alpha - \varepsilon = \alpha'$, devient

$$f_G(\alpha' k) \leq \frac{R(\alpha'+\varepsilon)^k}{k\varepsilon}. \tag{12}$$

Comme la fonction R est uniformément continue, il existe une constante $c > 0$ telle que $R(\alpha'+\varepsilon) < R(\alpha') + c\varepsilon$. En choisissant $\varepsilon = R(\alpha')/k$, il découle de (12) que

$$f_G(\alpha' k) \leq \frac{\left(R(\alpha') + \frac{cR(\alpha')}{k}\right)^k}{R(\alpha')} \leq (R(\alpha'))^{k-1} e^c. \tag{13}$$

Pour simplifier les notations, posons $c_1 := e^c$ et remplaçons α' par α, de sorte que (13) devient

$$f_G(\alpha k) < c_1 R(\alpha)^{k-1}. \tag{14}$$

Les relations (8) et (14) nous permettent de conclure que, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $t > 0$, on a la chaîne d'inégalités

$$\begin{aligned}
\int_{(\alpha-\varepsilon)k}^{(\alpha+\varepsilon)k} f_G(x)e^{-tx}dx &= \left(\frac{1-e^{-t}}{t}\right)^k - \int_0^{(\alpha-\varepsilon)k} f_G(x)e^{-tx}dx - \int_{(\alpha+\varepsilon)k}^{k} f_G(x)e^{-tx}dx \\
&\geq \left(\frac{1-e^{-t}}{t}\right)^k - k \max_{x\notin[(\alpha-\varepsilon)k,(\alpha+\varepsilon)k]} f_G(x)e^{-tx} \\
&\geq \left(\frac{1-e^{-t}}{t}\right)^k - k \max_{x\notin[(\alpha-\varepsilon)k,(\alpha+\varepsilon)k]} c_1 R(x/k)^{k-1}e^{-tx}.
\end{aligned} \tag{15}$$

Comme ces inégalités sont valides pour tout $t > 0$, on peut choisir $t = t_0(\alpha)$. On obtient dans ce cas

$$\max_{x\notin[(\alpha-\varepsilon)k,(\alpha+\varepsilon)k]} R(x/k)^{k-1}e^{-t_0(\alpha)x} = \max_{\theta\notin[\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon]} (e^{-t_0(\alpha)\theta}R(\theta))^k R(\theta)^{-1}.$$

Il découle de la définition de la fonction R que

$$e^{-t_0(\alpha)\theta}R(\theta) = e^{-t_0(\alpha)\theta}\,\frac{e^{t_0(\theta)\theta}(1-e^{-t_0(\theta)})}{t_0(\theta)}.$$

D'autre part, comme $R(\theta)$ est en réalité une fonction des variables θ et $t_0(\theta)$, on peut écrire $R(\theta) = S(\theta, t_0(\theta))$, de sorte que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\theta} e^{-t_0(\alpha)\theta}R(\theta) &= -t_0(\alpha)e^{-t_0(\alpha)\theta}R(\theta) + e^{-t_0(\alpha)\theta}\frac{d\,R(\theta)}{d\,\theta} \\
&= -t_0(\alpha)e^{-t_0(\alpha)\theta}R(\theta) + e^{-t_0(\alpha)\theta}\left(\frac{\partial S}{\partial t_0}\cdot\frac{\partial t_0}{\partial\theta} + \frac{\partial S}{\partial\theta}\right).
\end{aligned}$$

Or comme $t_0(\theta)$ a été choisi de façon à minimiser $R(\theta)$, il est clair que $\frac{\partial S}{\partial t_0} = 0$. Puisque $\frac{\partial S}{\partial\theta} = t_0(\theta)R(\theta)$, il s'ensuit que

$$\frac{d}{d\theta} e^{-t_0(\alpha)\theta}R(\theta) = e^{-t_0(\alpha)\theta}R(\theta)(t_0(\theta) - t_0(\alpha)).$$

Comme $e^{-t_0(\alpha)\theta}R(\theta) > 0$ et comme $t_0(\theta)$ est une fonction décroissante, il suit que la fonction $e^{-t_0(\alpha)\theta}R(\theta)$ atteint son maximum lorsque $\theta = \alpha$, et en fait qu'elle est croissante sur $(0, \alpha)$ et décroissante sur $(\alpha, \frac{1}{2})$. C'est pourquoi,

$$\max_{\theta \notin [\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon]} e^{-t_0(\alpha)\theta}R(\theta) \leq e^{-t_0(\alpha)\alpha}R(\alpha) - c_2(\alpha)\varepsilon^2$$

pour une certaine constante $c_2(\alpha)$ indépendante de ε. En choisissant $\varepsilon = k^{-1/4}$, on obtient alors

$$k \max_{x \notin [(\alpha-\varepsilon)k, (\alpha+\varepsilon)k]} R(x/k)^{k-1}e^{-t_0(\alpha)x} = O\left(k(e^{-t_0(\alpha)\alpha}R(\alpha) - c_2 k^{-1/2})^k\right) = o\left(\left(\frac{1-e^{-t_0(\alpha)}}{t_0(\alpha)}\right)^k\right).$$

En utilisant cette inégalité dans (15), on obtient que pour tout $\delta > 0$, il existe un entier positif k_0 tel que pour tout $k \geq k_0$,

$$\int_{(\alpha-k^{-1/4})k}^{(\alpha+k^{-1/4})k} f_G(x)e^{-t_0(\alpha)x}dx > (1-\delta)\left(\frac{1-e^{-t_0(\alpha)}}{t_0(\alpha)}\right)^k. \tag{16}$$

En observant par ailleurs que

$$\begin{aligned} \int_{(\alpha-k^{-1/4})k}^{(\alpha+k^{-1/4})k} f_G(x)e^{-t_0(\alpha)x}dx &\leq e^{-t_0(\alpha)(\alpha-k^{-1/4})k}\int_{(\alpha-k^{-1/4})k}^{(\alpha+k^{-1/4})k} f_G(x)dx \\ &\leq e^{-t_0(\alpha)(\alpha-k^{-1/4})k}P(G < (\alpha+k^{-1/4})k), \end{aligned}$$

on peut déduire de (16) que

$$e^{-t_0(\alpha)(\alpha-k^{-1/4})k}P(G < (\alpha+k^{-1/4})k) \geq (1-\delta)\left(\frac{1-e^{-t_0(\alpha)}}{t_0(\alpha)}\right)^k,$$

et ainsi que

$$P(G < (\alpha+k^{-1/4})k) \geq (1-\delta)\left(\frac{e^{\alpha t_0(\alpha)}(1-e^{-t_0(\alpha)})}{t_0(\alpha)}\right)^k \cdot e^{-t_0(\alpha)k^{3/4}}. \tag{17}$$

En posant $\alpha' = \alpha + k^{-1/4}$ et comme la fonction $e^{\alpha t_0(\alpha)}(1-e^{-t_0(\alpha)})/t_0(\alpha)$ est continue, nous avons $e^{\alpha' t(\alpha')}(1-e^{-t(\alpha')})/t(\alpha') > e^{\alpha t_0(\alpha)}(1-e^{-t_0(\alpha)})/t_0(\alpha) - c_3k^{-1/4}$, où $c_3 = c_3(\alpha)$ est une constante positive qui ne dépend pas de k. Ainsi, en utilisant (17), on obtient qu'il existe une constante positive C dépendante de α mais indépendante de k telle que

$$\begin{aligned} P(G < \alpha' k) &\geq (1-\delta)\left(\frac{e^{\alpha' t(\alpha')}(1-e^{-t(\alpha')})}{t(\alpha')} + c_3k^{-1/4}\right)^k \cdot e^{t_0(\alpha')k^{3/4}} \\ &\geq \frac{1}{2}\left(\frac{e^{\alpha' t(\alpha')}(1-e^{-t(\alpha')})}{t(\alpha')}\right)^{k+Ck^{3/4}}, \end{aligned}$$

ce qui complète la démonstration du lemme 4.

Étant donné un nombre réel positif x et un entier positif k fixés, on subdivise l'ensemble des nombres premiers $p \leq x$ en des sous-ensembles disjoints $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_{k-1}$ définis comme suit:

$$p \in \pi_j \Longleftrightarrow \frac{j}{k} < 1 - \left\{ \frac{\log p}{\log B} \right\} \leq \frac{j+1}{k}.$$

Ainsi, pour $B = 10$, $k = 3$ et $x = 30$, on obtient

$$\pi_0 = \{5, 7\}, \qquad \pi_1 = \{3, 23, 29\}, \qquad \pi_2 = \{2, 11, 13, 17, 19\}.$$

Au même titre, on introduit les fonctions de compte $\omega_0(n), \omega_1(n), \ldots, \omega_{k-1}(n)$ définies par

$$\omega_j(n) = \sum_{\substack{p \mid n \\ p \in \pi_j}} 1.$$

Lemme 5. *Lorsque $x \to \infty$,*

$$\#\{n < x : \omega(n) = r\} = (1 + o(1)) D(z) \frac{x}{\log x} \frac{(\log \log x)^{r-1}}{(r-1)!},$$

où $z = r / \log \log x$ et

$$D(z) := \frac{1}{\Gamma(z+1)} \prod_p \left(1 + \frac{z}{p-1}\right) \left(1 - \frac{1}{p}\right)^z.$$

Cette estimation est valable uniformément pour $x \geq 3$ et $1 \leq r \leq C \log \log x$ pour toute constante fixe $C > 0$.

Démonstration du lemme 5. Il s'agit d'un résultat classique de Selberg [6].

Remarquons que sur $[0, 1]$ la fonction $D(z)$ est croissante et que $D(1) = 1$. Afin d'être en mesure d'utiliser le lemme 5, nous aurons également besoin du lemme technique suivant.

Lemme 6. *Soient x et y deux nombres réels tels que $0 < y \leq x$. Alors, lorsque $x \to \infty$,*

$$\#\{n < y : \omega(n) = \lfloor \beta \log \log x \rfloor\} = (\log x)^{o(1)} y (\log y)^{-\beta\kappa \log \kappa\beta + \kappa\beta - 1},$$

où $\kappa = \kappa(x, y) := \log \log x / \log \log y$.

Démonstration du lemme 6. En utilisant la formule de Stirling sous la forme $n! = (1 + o(1))\sqrt{2\pi n}(n/e)^n$ ainsi que le résultat de Selberg (lemme 5), on obtient aisément

$$\begin{aligned}
\#\{n < y : \omega(n) = \lfloor \beta \log \log x \rfloor\} &= (1 + o(1)) D(\kappa\beta) \frac{y}{\log y} \frac{(\log \log y)^{\lfloor \beta \log \log x \rfloor - 1}}{(\lfloor \beta \log \log x \rfloor - 1)!} \\
&= (\log x)^{o(1)} \frac{y}{\log y} \left(\frac{e}{\kappa\beta}\right)^{\kappa\beta \log \log y} \\
&= (\log x)^{o(1)} y (\log y)^{-\kappa\beta \log \kappa\beta + \kappa\beta - 1}.
\end{aligned}$$

Signalons d'abord que, lorsque $y = x$, i.e. $\kappa = 1$, le lemme 6 entraîne en particulier que

$$\#\{n < x : \omega(n) = \lfloor \beta \log\log x \rfloor\} = x(\log x)^{-\beta\log\beta+\beta-1+o(1)},$$

ce qui permet de déduire que

$$\#\{n < x : \omega > 10 \log\log x\} = o\left(\frac{x}{\log x}\right). \tag{18}$$

Lemme 7. *Soit $\mathcal{A}$ un ensemble de nombres premiers tel que*

$$\sum_{\substack{p\in\mathcal{A}\\ p<x}} \frac{1}{p} = (1 + o(1))c \log\log x$$

pour une certaine constante positive c. Alors

$$\#\{n < x : p|n \Longrightarrow p \in A, \omega(n) = K\} = (1 + o(1))c^K \#\{n < x : \omega(n) = K\}.$$

Démonstration du lemme 7. Il s'agit d'un cas particulier du théorème B de De Koninck et Luca [3].

Des lemmes 6 et 7, on peut aisément déduire le corollaire suivant.

Corollaire 1. *Soit $\mathcal{A}$ un ensemble de nombres premiers tel que*

$$\sum_{\substack{p\in\mathcal{A}\\ p<x}} \frac{1}{p} = (1 + o(1))c \log\log x$$

pour une certaine constante positive c. Alors

$$\#\{n < y : p|n \Longrightarrow p \in \mathcal{A}, \omega(n) = \lfloor \beta \log\log x \rfloor\} = (\log x)^{o(1)} y(\log y)^{-\kappa\beta\log\kappa\beta+\kappa\beta-1+\kappa\beta\log c}.$$

Lemme 8. *Pour tous nombres réels a, b tels que $0 \le a < b \le 1$, on a*

$$\sum_{\substack{p<x\\ \{\frac{\log p}{\log B}\}\in[a,b]}} \frac{1}{p} = (1 + o(1))(b - a) \log\log x.$$

Démonstration du lemme 8. On a

$$\sum_{\substack{p<x\\ \{\frac{\log p}{\log B}\}\in[a,b]}} \frac{1}{p} = \sum_{0\le j<\frac{\log x}{\log B}} \sum_{B^{j+a}<p<B^{j+b}} \frac{1}{p}.$$

D'après la formule de Mertens raffinée par Rosser et Schoenfeld [5], il existe une constante c_0 telle que

$$\sum_{p<x} \frac{1}{p} = \log\log x + c_0 + O\left(\frac{1}{\log^2 x}\right).$$

C'est pourquoi, on obtient

$$\sum_{B^{j+a}<p<B^{j+b}} \frac{1}{p} = \log(j+b) - \log(j+a) + O\left(\frac{1}{j^2}\right) = \log(1+b/j) - \log(1+a/j) + O\left(\frac{1}{j^2}\right),$$

de sorte que

$$\begin{aligned}\sum_{0\le j<\frac{\log x}{\log B}} \sum_{B^{j+a}<p<B^{j+b}} \frac{1}{p} &= \sum_{0\le j<\frac{\log x}{\log B}} (\log(1+b/j) - \log(1+a/j)) + O(1)\\ &= \sum_{0\le j<\frac{\log x}{\log B}} \frac{b-a}{j} + O(1)\\ &= (1+o(1))(b-a)\log\log x,\end{aligned}$$

ce qui complète la démonstration du lemme 8.

Lemme 9. *Soit k un entier positif fixe et $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ des nombres réels non négatifs fixes. Soient x, y des nombres réels tels que $0 < y \le x$ et $\kappa := \log\log x/\log\log y$. Alors, lorsque $x \to \infty$,*

$$\begin{aligned}&\#\{n \le y : \omega_0(n) = \lfloor c_0 \log\log x\rfloor, \omega_1(n) = \lfloor c_1 \log\log x\rfloor, \ \ldots, \ \omega_{k-1}(n) = \lfloor c_{k-1}\log\log x\rfloor\}\\ &\quad = (\log x)^{o(1)} y (\log y)^{-\kappa C_{k-1}\log k - \kappa D_{k-1} + C_{k-1}(\kappa - \log\kappa) - 1},\end{aligned}$$

où $C_j := c_0 + c_1 + \ldots + c_j$ et $D_j = c_0 \log c_0 + c_1 \log c_1 + \ldots + c_j \log c_j$ pour $j = 0, 1, \ldots, k-1$.

Remarque. Nous utiliserons le lemme 9 seulement dans le cas $y = x$, ce qui implique $\kappa = 1$. Le membre de droite de la relation de l'énoncé se simplifie alors pour donner

$$x(\log x)^{-C_{k-1}\log k - D_{k-1} + C_{k-1} - 1 + o(1)}.$$

Par exemple, si $k = 3$ et si $c_0 = c_1 = 1/4$ et $c_2 = 1/2$, on obtient

$$\begin{aligned}&\#\left\{n < x : \omega_0(n) = \left\lfloor \frac{1}{4}\log\log x\right\rfloor, \omega_1(n) = \left\lfloor \frac{1}{4}\log\log x\right\rfloor, \omega_2(n) = \left\lfloor \frac{1}{2}\log\log x\right\rfloor\right\}\\ &\quad = x(\log x)^{-\log 3 + \frac{3}{2}\log 2 + o(1)}.\end{aligned}$$

Démonstration du lemme 9. Fixons $k \ge 1$. Soit r un entier, $1 \le r \le k-1$. Supposons que le résultat soit vrai si $c_j = 0$ pour tout $j \ge r$, et procédons par induction sur r. Pour $r = 1$, le résultat découle immédiatement du corollaire 1. En supposant que le résultat soit vrai pour r, nous allons démontrer qu'il est alors vrai pour $r+1$.

Pour ce faire, introduisons d'abord les deux fonctions de compte

$$\begin{aligned}M(y) : \ = \ &\#\{n \le y : \omega_0(n) = \omega_1(n) = \ldots = \omega_{r-1}(n) = 0, \ \omega_r(n) = \lfloor c_r \log\log x\rfloor,\\ &\omega_{r+1}(n) = \ldots = \omega_{k-1}(n) = 0\}\end{aligned}$$

et

$$T(y) := \#\{n \le y : n \in T\},$$

où

$$T: \;=\; \{n : \omega_0(n) = \lfloor c_0 \log\log x \rfloor,\ \omega_1(n) = \lfloor c_1 \log\log x \rfloor,\ \ldots,\ \omega_{r-1}(n) = \lfloor c_{r-1} \log\log x \rfloor \text{ et } \omega_j(n) = 0,\ \text{pour } j \geq r\}.$$

Remarquons que les fonctions T et M dépendent implicitement de x. On pose

$$\nu := \frac{\log\log y/t}{\log\log x} \qquad \text{et} \qquad \mu := \frac{\log\log t}{\log\log x}.$$

Fort de ces notations, on a alors que

$$\begin{aligned}(19)\quad &\#\{n \leq y : \omega_0(n) = \lfloor c_0 \log\log x \rfloor,\ \omega_1(n) = \lfloor c_1 \log\log x \rfloor,\ \ldots,\ \omega_r(n) = \lfloor c_r \log\log x \rfloor \\ &\qquad \text{et } \omega_j(n) = 0 \text{ pour } j \geq r+1\} \\ &= \sum_{t \in T} M\left(\frac{y}{t}\right) = \int_1^y M\left(\frac{y}{t}\right)\, dT(t).\end{aligned}$$

En utilisant de nouveau le corollaire 1, on obtient pour chaque $t \leq y$,

$$(20)\qquad M\left(\frac{y}{t}\right) = (\log x)^{o(1)} \frac{y}{t} (\log y/t)^{-\nu c_r \log \nu c_r + \nu c_r - \nu c_r \log k - 1}.$$

Or, par notre hypothèse d'induction, on a

$$(21)\qquad T(t) = (\log x)^{o(1)} t (\log t)^{-\mu C_{r-1} \log \mu - \mu D_{r-1} + \mu C_{r-1} - \mu C_{r-1} \log k - 1}.$$

En utilisant (20) et (21), ainsi que les inégalités $\mu \leq \kappa$, $\nu \leq \kappa$, $\log t \leq \log y$ et $\log(y/t) \leq \log y$, on peut borner supérieurement l'intégrale apparaissant dans (19) et obtenir que

$$\begin{aligned}\int_1^x M\left(\frac{x}{t}\right) dT(t) &\leq y (\log x)^{o(1)} \int_1^y \frac{1}{t} (\log y/t)^{-\kappa c_r \log \kappa + \kappa c_r - \kappa c_r \log k - 1} \\ &\qquad \cdot (\log t)^{-\kappa C_{r-1} \log \kappa - \kappa D_{r-1} + \kappa C_{r-1} - \kappa C_{r-1} \log k - 1}\, dt \\ (22)\qquad &= (\log x)^{o(1)} (\log y)^{-\kappa C_r \log \kappa - \kappa D_r + \kappa C_r - \kappa C_r \log k - 1}.\end{aligned}$$

En substituant (22) dans (19), la borne supérieure du lemme 9 suit immédiatement. Pour démontrer la borne inférieure, on utilise l'inégalité

$$\int_1^y M\left(\frac{y}{t}\right) dT(t) \geq \int_{y^{1/3}}^{y^{2/3}} M\left(\frac{y}{t}\right) dT(t).$$

Dans cet intervalle, on a $\nu = \kappa + o(1)$ et $\mu = \kappa + o(1)$. On a également $\log t \geq \frac{1}{3} \log y$ et $\log y/t \geq \frac{1}{3} \log y$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\int_1^y M\left(\frac{y}{t}\right) dT(t) &\geq (\log x)^{o(1)} y \left(\frac{\log y}{9}\right)^{-\kappa C_r \log \kappa - \kappa D_r + \kappa C_r - \kappa C_r \log k - 2} \int_{y^{1/3}}^{y^{2/3}} \frac{1}{t}\, dt \\ &= (\log x)^{o(1)} (\log y)^{-\kappa C_r \log \kappa - \kappa D_r + \kappa C_r - \kappa C_r \log k - 1},\end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration du lemme 9.

Dans le cas $y = x$, i.e. $\kappa = 1$, le lemme 9 peut également être écrit sous la forme suivante, ce qui nous permettra d'utiliser des résultats probabilistes.

Corollaire 2. *Pour tout entier positif k fixe et étant donné des entiers non négatifs $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$, on a, lorsque $x \to \infty$,*

$$\begin{aligned}\#\{n \leq x : \omega_0(n) = \lfloor c_0 \log\log x \rfloor,\ \omega_1(n) = \lfloor c_1 \log\log x \rfloor,\ \ldots,\ \omega_{k-1}(n) = \lfloor c_{k-1} \log\log x \rfloor\} \\ = \#\{n \leq x : \omega(n) = \lfloor C_{k-1} \log\log x \rfloor\} \cdot k^{-\lfloor C_{k-1} \log\log x \rfloor} \frac{\lfloor C_{k-1} \log\log x \rfloor !}{\prod_{j=0}^{k-1} \lfloor c_j \log\log x \rfloor !} (\log x)^{o(1)}.\end{aligned}$$

Démonstration du corollaire 2. Le résultat découle immédiatement des lemmes 5 et 9 et de la formule de Stirling.

De la définition de $f_B(n)$, il découle immédiatement que

$$\sum_{j=0}^{k-1} \frac{j\omega_j(n)}{k} \leq f_B(n) \leq \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(j+1)\omega_j(n)}{k}. \tag{23}$$

En posant également, pour $y \leq \log x$,

$$F_B(x, y) = \#\{n \leq x : f_B(n) < y\},$$

on obtient de (23) que

$$F_B(x, y) < \sum_{r=1}^{\lfloor \log x \rfloor} \sum_{u \in S_r(y)} \#\{n < x : \omega_0(n) = u_0, \ldots, \omega_k(n) = u_k\}, \tag{24}$$

où $S_r(y)$ est l'ensemble des vecteurs $(u_1, \ldots, u_k)$ de dimension k sur $\mathbb{N}$ tels que

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_k = r$$

et

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{ju_j}{k} < y.$$

En utilisant le corollaire 2 dans l'équation (24), on obtient

$$F_B(x, y) < \sum_{r=1}^{\lfloor \log x / \log 2 \rfloor} \#\{n < x : \omega(n) = r\} \frac{1}{k^r} \#S_r(y). \tag{25}$$

En désignant par V_r la somme de r variables indépendantes prenant chacune des valeurs $\frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \ldots, 1$ avec une probabilité de $\frac{1}{k}$, on a alors l'identité

$$\frac{1}{k^r} \#S_r(y) = P(V_r < y) \qquad (r = 1, 2, \ldots).$$

C'est pourquoi, il découle de (25) que

$$F_B(x,y) < \sum_{r=1}^{\lfloor \log x/\log 2\rfloor} \#\{n < x : \omega(n) = r\} P(V_r < y). \tag{26}$$

De façon analogue, on peut montrer que

$$F_B(x,y) > \sum_{r=1}^{\lfloor \log x/\log 2\rfloor} \#\{n < x : \omega(n) = r\} P\left(V_r < y - \frac{r}{k}\right). \tag{27}$$

Désignant maintenant par $G_r = g_1 + g_2 + \ldots + g_r$ la somme de r variables indépendantes uniformément distribuées sur $[0,1]$, on a que, pour tout y,

$$P\left(V_r < y - \frac{r}{k}\right) < P(G_r < y) < P(V_r < y). \tag{28}$$

Comme k peut être choisi arbitrairement grand, il s'ensuit que

$$\lim_{k\to\infty} P\left(V_r < y - \frac{r}{k}\right) = P(V_r < y).$$

Ainsi, en combinant (26), (27) et (28), on en déduit que

$$F_B(x,y) = \sum_{r=1}^{\lfloor \log x/\log 2\rfloor} \#\{n < x : \omega(n) = r\} P(G_r < y)(\log x)^{o(1)}. \tag{29}$$

Corollaire 3. *Pour* $2 \le y \le \log x$, *lorsque* $x \to \infty$,

$$F_B(x,y) = \max_{r\le 10\log\log x} \#\{n < x : \omega(n) = r\} P(G_r < y)(\log x)^{o(1)} + o\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

Démonstration du corollaire 3. Le résultat découle aisément des relations (29) et (18), puisque l'on a alors

$$\begin{aligned} F_B(x,y) &= \sum_{r=1}^{\lfloor \log x\rfloor} \#\{n < x : \omega(n) = r\} P(G_r < y)(\log x)^{o(1)} \\ &= \max_{r\le 10\log\log x} \#\{n < x : \omega(n) = r\} P(G_r < y)(\log x)^{o(1)} \\ &\qquad + \quad O\left(\#\{n \le x : \omega(n) > 10\log\log x\}\right) \\ &= \max_{r\le 10\log\log x} \#\{n < x : \omega(n) = r\} P(G_r < y)(\log x)^{o(1)} + o\left(\frac{x}{\log x}\right). \end{aligned}$$

Nous allons maintenant utiliser le corollaire 3 pour obtenir une estimation précise de l'expression $F_B(x,y)$ lorsque $y = \chi \log\log x$, où χ est un réel positif fixé et x tend vers l'infini. D'abord, il est clair qu'il découle du corollaire 3 que

$$\begin{aligned} F_B(x, \chi\log\log x) &= (\log x)^{o(1)} \max_{1\le r\le 10\log\log x} \left(\#\{n < x : \omega(n) = r\} \cdot P\left(G_r < \chi\log\log x\right)\right) \\ &\qquad + o\left(\frac{x}{\log x}\right), \end{aligned}$$

de sorte qu'en définissant le nombre $\beta = \beta(x,r)$ implicitement par l'équation $\lfloor \beta \log\log x \rfloor = r$, on obtient

$$\begin{aligned} F_B(x, \chi \log\log x) &= (\log x)^{o(1)} \max_{(\log\log x)^{-1} \le \beta \le 10} \Big(\#\{n < x : \omega(n) = \lfloor \beta \log\log x \rfloor\} \\ &\qquad \cdot P\left(G_{\lfloor \beta \log\log x \rfloor} < \chi \log\log x\right) \Big) + o\left(\frac{x}{\log x}\right). \end{aligned}$$

En utilisant le lemme 6, on obtient alors

$$\begin{aligned} F_B(x, \chi \log\log x) &= (\log x)^{o(1)} \max_{(\log\log x)^{-1} \le \beta \le 10} \Big(x (\log x)^{-\beta\log\beta + \beta - 1} \\ &\qquad \cdot P\left(G_{\lfloor \beta \log\log x \rfloor} < \chi \log\log x\right) \Big) + o\left(\frac{x}{\log x}\right). \end{aligned} \tag{30}$$

Or, il découle du lemme 4 que

$$P\left(G_{\lfloor \beta \log\log x \rfloor} < \chi \log\log x\right) = (R(\chi/\beta) + o(1))^{\beta \log\log x} = (\log x)^{\beta \log R(\chi/\beta) + o(1)}. \tag{31}$$

Des relations (30) et (31), on peut donc déduire que

$$F_B(x, \chi \log\log x) = \max_{(\log\log x)^{-1} \le \beta \le 10} \left(x (\log x)^{\beta - 1 - \beta(\log\beta) + \beta \log R(\chi/\beta) + o(1)} \right), \tag{32}$$

laquelle relation est fondamentale pour la démonstration du lemme qui suit.

Lemme 10. *Lorsque* $x \to \infty$,

$$N_B(x) = \max_{0 < \rho < \log x / \log\log x} F_B\left(\frac{x}{(\log x)^\rho}, \frac{\rho}{\log B} \log\log x\right) (\log x)^{o(1)}.$$

Démonstration du lemme 10. Nous allons d'abord démontrer que

$$N_B(x) \ge \max_{0 < \rho < \log x / \log\log x} F_B\left(\frac{x}{(\log x)^\rho}, \frac{\rho}{\log B} \log\log x\right). \tag{33}$$

Il découle du lemme 1 que

$$N_B(x) \ge \max_{0 \le a \le \log x / \log 2} F_B\left(\frac{x}{2^a}, \frac{a \log 2}{\log B}\right). \tag{34}$$

Or, en définissant implicitement ρ par la relation $2^a = (\log x)^\rho$, l'inégalité (33) suit immédiatement.

Nous allons maintenant établir que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel $x_0 = x_0(\varepsilon)$ tel que pour tout $x > x_0$, on a

$$N_B(x) \le \max_{0 < \rho < \log x / \log\log x} F_B\left(\frac{x}{(\log x)^\rho}, \frac{\rho}{\log B} \log\log x\right) (\log x)^\varepsilon, \tag{35}$$

laquelle inégalité combinée avec (33) complétera la démonstration du lemme 10.

Du lemme 2, on peut déduire que

$$N_B(x) \leq \sum_{\substack{v<\log^2 x \\ v \text{ puissant}}} F_B\left(\frac{x}{v}, \frac{1}{\log B}\log\left(\frac{v}{\gamma(v)}\right) + \varepsilon \log\log x\right).$$

De la définition de la fonction $\lambda(n)$ donnée dans (5) on obtient que

$$\log\left(\frac{v}{\gamma(v)}\right) = \log v - \log\gamma(v) = \log v\left(1 - \frac{1}{\lambda(v)}\right),$$

ce qui nous permet d'écrire, en utilisant le fait que si v est un nombre puissant alors $\lambda(v) \geq 2$,

$$\begin{aligned} N_B(x) &\leq \sum_{\substack{v<\log^2 x \\ \lambda(v)\geq 2}} F_B\left(\frac{x}{v}, \frac{\log v}{\log B}\left(1 - \frac{1}{\lambda(v)}\right) + \varepsilon\log\log x\right) \\ &= \sum_{\substack{v<\log^2 x \\ 2\leq\lambda(v)\leq k_1}} + \sum_{\substack{v<\log^2 x \\ \lambda(v)>k_1}} = T_1(x) + T_2(x), \end{aligned}$$

disons, où k_1 est un entier positif grand, mais fixe.

Pour évaluer $T_2(x)$, observons qu'il résulte du lemme 3 que

$$\#\{v < (\log x)^2 : \lambda(v) \geq k_1\} < (\log x)^{3/k_1},$$

de sorte que, en écrivant chaque nombre $v < \log^2 x$ sous la forme $v = \log^\xi x$, où $\xi \in (0,2)$, on peut déduire que

$$\begin{aligned} T_2(x) &< \sum_{\substack{v<(\log x)^2 \\ \lambda(v)\geq k_1}} F_B\left(\frac{x}{v}, \frac{\log v}{\log B} + \varepsilon\log\log x\right) \\ &< (\log x)^{3/k_1} \max_{0<\xi<2} F_B\left(\frac{x}{(\log x)^\xi}, \frac{\xi\log\log x}{\log B} + \varepsilon\log\log x\right). \end{aligned} \tag{36}$$

Cherchons maintenant une borne supérieure pour $T_1(x)$, soit dans le cas où $\lambda(v) < k_1$. Fixons un petit nombre réel $\delta > 0$. On peut alors écrire

$$T_1(x) = \sum_{\substack{v<(\log x)^2 \\ 2\leq\lambda(v)\leq k_1}} F_B\left(\frac{x}{v}, \frac{\log v}{\log B}\left(1 - \frac{1}{\lambda(v)}\right) + \varepsilon\log\log x\right) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k_1}{\delta} \rfloor} S_j, \tag{37}$$

où

$$\begin{aligned} S_j &:= \sum_{\substack{v<(\log x)^2 \\ 2+j\delta\leq\lambda(v)<2+(j+1)\delta}} F_B\left(\frac{x}{v}, \frac{\log v}{\log B}\left(1 - \frac{1}{\lambda(v)}\right) + \varepsilon\log\log x\right) \\ &< \sum_{\substack{v<(\log x)^2 \\ 2+j\delta\leq\lambda(v)<2+(j+1)\delta}} F_B\left(\frac{x}{v}, \frac{\log v}{\log B}\left(1 - \frac{1}{2+(j+1)\delta}\right) + \varepsilon\log\log x\right) \\ &= \int_1^{(\log x)^2} F_B\left(\frac{x}{t}, \frac{\log t}{\log B}\left(1 - \frac{1}{2+(j+1)\delta}\right)(1+o(1))\right) d(H_{j,\delta}(t)). \end{aligned} \tag{38}$$

En utilisant le lemme 3 pour évaluer cette dernière intégrale et en effectuant par la suite le changement de variable $t = (\log x)^\xi$, on peut remplacer (38) par

$$
\begin{aligned}
(39)\quad S_j &\le \int_1^{(\log x)^2} F_B\left(\frac{x}{t}, \frac{\log t}{\log B}\left(1 - \frac{1}{2+(j+1)\delta}\right) + \varepsilon \log\log x\right) t^{(2+j\delta)^{-1}-1+\varepsilon} dt \\
&= \int_0^2 (\log x)^{\xi/(2+j\delta)} F_B\left(\frac{x}{(\log x)^\xi}, \frac{\xi \log\log x}{\log B}\left(1 - \frac{1}{2+(j+1)\delta}\right)\right) (\log x)^{\varepsilon_1} d\xi,
\end{aligned}
$$

où $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\varepsilon)$ est un nombre réel positif qui tend vers 0 avec ε.

En faisant appel à la relation (32), nous obtenons une nouvelle borne supérieure pour S_j, soit

$$
\begin{aligned}
(40)\qquad S_j &\le \int_0^2 F_B\left(\frac{x}{(\log x)^{\xi(1-\frac{1}{2+j\delta})}}, \frac{\xi \log\log x}{\log B}\left(1 - \frac{1}{2+(j+1)\delta}\right)\right) (\log x)^{\varepsilon_2} d\xi \\
&\le 2 \max_{0\le\xi\le 2} F_B\left(\frac{x}{(\log x)^\xi}, \frac{\xi}{\log B}\log\log x\right) (\log x)^{\varepsilon_2},
\end{aligned}
$$

où $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\varepsilon_1)$ est également une quantité positive qui tend vers 0 lorsque $\varepsilon_1 \to 0$.

En substituant (40) dans (37), on obtient finalement

$$
\begin{aligned}
(41)\qquad &\sum_{\substack{v<(\log x)^2 \\ 2\le\lambda(v)\le k_1}} F_B\left(\frac{x}{v}, \frac{\log v}{\log B}\left(1 - \frac{1}{2+(j+1)\delta}\right) + \varepsilon \log\log x\right) \\
&\qquad \le \frac{k_1}{\delta} \max_{0\le\xi\le 2} F_B\left(\frac{x}{(\log x)^\xi}, \frac{\xi}{\log B}\log\log x\right) (\log x)^{\varepsilon_2}.
\end{aligned}
$$

En choisissant maintenant $k_1 = 3/\varepsilon$ et $\delta = 1/k$, on peut alors déduire de (36) et (41) l'inégalité (35), complétant ainsi la preuve du lemme 10.

§4. La démonstration du résultat principal

D'abord, il est clair que la relation

$$N_B(x) = \frac{x}{(\log x)^{K(B)+o(1)}}$$

est une conséquence immédiate de l'équation (32) et du lemme 10.

Il reste à établir la relation (2). Pour ce faire, observons d'abord que le nombre $t = t_0(\alpha)$ auquel le minimum est atteint dans la définition de $R(\alpha)$ est donné par la solution de l'équation $\frac{dR}{dt} = 0$, laquelle peut être écrite sous la forme

$$\frac{-(1-e^{-t})e^{t\alpha}}{t^2} + \frac{\alpha e^{\alpha t} + (1-\alpha)e^{-(1-\alpha)t}}{t} = 0,$$

ce qui se ramène après simplification à

$$(42)\qquad \frac{1}{t} - \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} = \alpha.$$

Il s'ensuit que lorsque α tend vers 0, on a $t_0(\alpha) \sim \frac{1}{\alpha}$, de sorte que

$$R(\alpha) \sim \alpha e.$$

On a donc que, lorsque B tend vers l'infini,

$$K(B) = (1 + o(1)) \min_{\rho>0} \left(\min_{0<\beta<1} (1 + \rho + \beta (\log \beta - 1 - \log(e\rho/\beta \log B))) \right). \tag{43}$$

En dérivant l'expression à droite de (43) par rapport à β, on obtient

$$2 \log \beta - \log(\alpha / \log B).$$

C'est pourquoi l'expression à droite de (43) est minimale lorsque

$$\beta = \sqrt{\frac{\rho}{\log B}}.$$

En substituant cette valeur de β dans l'expression à droite de (43), on obtient

$$K(B) = (1 + o(1)) \min_{\rho>0} \left(1 + \rho - 2\sqrt{\frac{\rho}{\log B}} \right). \tag{44}$$

Par ailleurs, en dérivant l'expression à droite de (44) par rapport à ρ et en l'égalant à 0, on obtient

$$1 - \sqrt{\frac{1}{\rho \log B}} = 0,$$

de sorte que l'expression à droite de (44) est minimale lorsque

$$\rho = \frac{1}{\log B},$$

auquel cas il découle de (44) que

$$K(B) = (1 + o(1)) \left(1 - \frac{1}{\log B} \right),$$

ce qui prouve (2) et complète la démonstration du théorème.

§5. Remarque finale

La preuve du théorème ne dépend pas du fait que les nombres soient fortement économiques ou même tout simplement économiques. En fait, si on désigne par $S_B(n)$ le nombre de chiffres dans la factorisation de n en base B, le théorème est valable pour toutes les fonctions

$$N_B^k(x) := \# \left\{ n \leq x : \left\lceil \frac{\log n}{\log B} \right\rceil < S_B(n) + k \right\},$$

où k est un entier positif satisfaisant à $k = o(\log \log x)$.

References

[1] J. Browkin, *The abc-conjecture*. In: Number Theory, Trends Math. (2000), pp. 75-105. Basel: Birkhäuser.

[2] J.M. De Koninck et N. Doyon, *À propos de l'indice de composition des nombres*, Monatshefte für Mathematik, **139** (2003), 151-167.

[3] J.M. De Koninck and F. Luca, *Counting the number of economical numbers*, Publicationes Mathematicae Debrecen **68** (2006), 97-133.

[4] J.M. De Koninck and Florian Luca, *On strings of consecutive economical numbers of arbitrary length*, Integers, **5** (2005), #A5.

[5] J.B. Rosser et L. Schoenfeld, *Sharper bounds for the Chebyshev functions $\theta(x)$ and $\psi(x)$*, Math. Comp. **29** (1975), 243-269.

[6] A. Selberg, *Note on a paper by L.G. Sathe*, J. Indian Math. Soc. **18** (1954), 83-87.

[7] R. Pinch, *Economical numbers*, http://www.chalcedon.demon.co.uk/publish.html#62.

[8] B.R. Santos, "Problem 2204. Equidigital Representation", J. Recreational Mathematics **27** (1995), 58-59.

Jean-Marie De Koninck
Département de mathématiques
et de statistqiue
Université Laval
Québec G1K 7P4
Canada
jmdk@mat.ulaval.ca

Nicolas Doyon
Département de mathématiques
et de statistique
Université Laval
Québec G1K 7P4
Canada
nicolas.doyon@mat.ulaval.ca

Florian Luca
Mathematical Institute
UNAM
Ap. Postal 61-3 (Xangari)
CP 58 089
Morelia, Michoacán, MEXICO
fluca@matmor.unam.mx

JMDK, le 30 octobre 2006; fichier: economic112.tex