

## Sur la proximité des nombres puissants

par

JEAN-MARIE DE KONINCK (Québec) et FLORIAN LUCA (Morelia)

**1. Introduction.** On dit qu'un entier  $n > 1$  est un *nombre puissant* si pour chaque nombre premier  $p$  qui divise  $n$ , on a  $p^2 \mid n$ . La distribution des nombres puissants a été largement étudiée. En particulier, on sait que si  $S(N)$  désigne le nombre de nombres puissants qui n'excèdent pas  $N$ , alors

$$(1) \quad S(N) = C_1 \sqrt{N} + O(N^{1/3}), \quad C_1 = \frac{\zeta(3/2)}{\zeta(3)} \approx 2.1732,$$

où  $\zeta$  désigne la fonction zêta de Riemann. Des estimations encore plus précises sont connues (voir, par exemple, le théorème 14.4 du livre de Ivic [1]). Comme la constante  $C_1$  apparaissant dans (1) est supérieure à 2, il existe une infinité d'entiers positifs  $n$  tels que l'intervalle  $]n^2, (n+1)^2[$  admet au moins deux nombres puissants.

Nous démontrons ici que quel que soit l'entier positif  $k$ , il existe une infinité d'entiers positifs  $n$  tels que l'intervalle  $]n^2, (n+1)^2[$  contient au moins  $k$  nombres puissants. Nous établissons également que l'ensemble des entiers positifs  $n$ , dont l'intervalle  $]n^2, (n+1)^2[$  correspondant ne contient aucun nombre puissant, admet une densité, et nous calculons sa valeur.

Dans cet article, nous utilisons les symboles de Landau  $O$  et  $o$  de même que le symbole de Vinogradov  $\ll$  avec leurs significations habituelles.

### 2. Les principaux résultats

**THÉORÈME 1.** *Il existe une infinité d'entiers positifs  $n$  tels que l'intervalle  $]n^2, (n+1)^2[$  contient plus de*

$$\frac{9}{20} \left( \frac{\log n}{\log \log n} \right)^{1/3}$$

*nombres puissants.*

---

2000 *Mathematics Subject Classification*: 11A51, 11J13.

Travail de J.-M. De Koninck soutenu en partie par une subvention du CRSNG.

Travail de F. Luca soutenu en partie par les projets SEP-CONACYT 37259-E et 37260-E.

THÉORÈME 2. Si  $V(N)$  désigne le nombre d'entiers positifs  $n \leq N$  tels que l'intervalle  $]n^2, (n+1)^2[$  ne contient aucun nombre puissant, alors

$$V(N) = C_2 N + O\left(\frac{N}{\sqrt{\log \log N}}\right),$$

où

$$C_2 = \prod_{m=2}^{\infty} \left(1 - \frac{\mu^2(m)}{m^{3/2}}\right) \approx 0.275.$$

**3. La preuve du théorème 1.** Soit  $k$  un entier positif grand mais fixe et  $\alpha_1, \dots, \alpha_{2k}$  des nombres irrationnels positifs que l'on choisira plus tard. Selon le théorème de Dirichlet relatif aux approximations diophantiennes simultanées, pour tout nombre réel  $Q > 1$ , il existe un entier positif  $q \leq Q$  et des entiers  $p_1, \dots, p_{2k}$  tels que les inégalités

$$(2) \quad \left| \alpha_j - \frac{p_j}{q} \right| \leq \frac{1}{qQ^{1/2k}} \quad (j = 1, \dots, 2k)$$

sont satisfaites. Soit par ailleurs  $q_1 < \dots < q_n < \dots$  la suite infinie d'entiers positifs telle que pour chaque  $n \geq 1$ , il existe des entiers  $p_{n,1}, \dots, p_{n,2k}$  tels que les inégalités

$$(3) \quad \left| \alpha_j - \frac{p_{n,j}}{q_n} \right| \leq \frac{1}{q_n^{1+1/2k}} \quad (j = 1, \dots, 2k)$$

sont satisfaites. Le fait que  $(q_n)_{n \geq 1}$  est une suite infinie découle de la construction des inégalités (2) en tenant compte que les nombres  $\alpha_j$ , pour  $j = 1, \dots, 2k$ , sont irrationnels. Supposons maintenant que  $c_1 \geq 1$  est une constante telle que les inégalités

$$(4) \quad \left| \alpha_j - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{c_1 q^2} \quad (j = 1, \dots, 2k)$$

sont satisfaites pour tous les entiers  $p$  et  $q$  avec  $q \neq 0$ . Tel est le cas par exemple lorsque les réduites de la fraction continue de chaque  $\alpha_j$  sont bornées par  $c_1 - 1$ .

En utilisant (4), on obtient aisément que pour  $n \geq 1$ , en posant  $Q_n = (c_1 q_n)^{4k}$  et en utilisant (2), il existe des entiers  $p_1, \dots, p_{2k}, q$  avec  $1 \leq q \leq Q_n$  pour lesquels les inégalités (2) sont vérifiées avec  $Q_n$  à la place de  $Q$ . On a ainsi établi que les inégalités

$$\left| \alpha_j - \frac{p_j}{q} \right| \leq \frac{1}{qQ_n^{1/2k}} \leq \frac{1}{Q_n^{1/2k}} = \frac{1}{(c_1 q_n)^2} \leq \frac{1}{c_1 q_l^2} < \left| \alpha_j - \frac{p_{l,j}}{q_l} \right|$$

tiennent pour  $j = 1, \dots, 2k$  et  $l = 1, \dots, n$ , et en particulier que  $q \neq q_l$  pour  $l = 1, \dots, n$ . Ainsi,  $q \geq q_{n+1}$ , et on a donc démontré que

$$q_{n+1} \leq (c_1 q_n)^{4k} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Pour chaque entier  $j \geq 1$ , soit  $m_j$  le  $j$ -ième entier positif tel que  $m_j^2 + 1$  est libre de carrés, et pour  $j = 1, \dots, 2k$ , posons  $d_j = m_j^2 + 1$ . Avec un tel choix des  $d_j$ , il est alors clair que les nombres  $d_j p_j^2$ ,  $j = 1, \dots, 2k$ , sont tous distincts. De plus, d'après un résultat de Ricci [3], étant donné un polynôme primitif irréductible  $f(x)$  de degré  $r \geq 2$  à coefficients entiers, l'ensemble  $\{m \geq 1 : p^2 \mid f(m) \Rightarrow i < r\}$  est de densité positive. En particulier, l'ensemble  $\{m \geq 1 : \mu^2(m^2 + 1) = 1\}$  est de densité positive, et il est facile de voir que cette densité est égale à

$$\prod_{p \equiv 1 \pmod{4}} \left(1 - \frac{2}{p^2}\right) \approx 0.89 > \frac{1}{2},$$

de sorte que si  $j$  est suffisamment grand,  $d_j = m_j^2 + 1 < (2j)^2 + 1$ , auquel cas  $d_j < 4j^2$ . Il s'ensuit qu'en posant  $D := \prod_{j=1}^{2k} d_j$ , on a  $D < (16k^2)^{2k}$ .

Pour chaque  $j = 1, \dots, 2k$ , posons maintenant  $\alpha_j = 1/\sqrt{d_j}$ . Ainsi choisi, chaque nombre  $\alpha_j$  est irrationnel, et son développement en fraction continue est  $\alpha_j = [0, m_j, 2m_j, 2m_j, \dots]$ . Cela veut dire que l'on doit prendre  $c_1$  supérieur à  $\max\{2m_j : j = 1, 2, \dots, 2k\}$ . Or, comme  $m_j < 2j$  pour  $j$  suffisamment grand, il s'avère qu'en choisissant  $c_1 = 8k$ , l'inégalité (4) est satisfaite.

Soit maintenant  $q = q_m$  pour un certain  $m$  que l'on choisira plus tard, et soit  $p_j = p_{m,j}$  pour chaque entier  $j = 1, \dots, 2k$ . Fixons  $j$ . L'inégalité

$$\left| \alpha_j - \frac{p_j}{q} \right| \leq \frac{1}{q^{1+1/2k}}$$

entraîne que

$$(5) \quad |q - \sqrt{d_j} p_j| \leq \sqrt{d_j} q^{-1/2k}.$$

Supposons que

$$(6) \quad q > d_j^k.$$

Dans ce cas, l'inégalité (5) implique que  $\sqrt{d_j} |p_j| < q + 1$ , et donc que  $|q + \sqrt{d_j} p_j| < 2q + 1 < 3q$ , ce qui entraîne que

$$(7) \quad |q^2 - d_j p_j^2| = |q - \sqrt{d_j} p_j| \cdot |q + \sqrt{d_j} p_j| < 3\sqrt{d_j} q^{1-1/2k}.$$

Puisque, pour  $j = 1, \dots, 2k$ ,  $\sqrt{d_j} < (16k^2 + 1)^{1/2}$ , on a alors les inégalités

$$(8) \quad |(Dq)^2 - d_j D^2 p_j^2| < 3D^2(16k^2 + 1)^{1/2} q^{1-1/2k} \quad (j = 1, \dots, 2k).$$

Posons maintenant  $n = Dq$  et choisissons  $k$  de telle manière que

$$(9) \quad 3D^2(16k^2 + 1)^{1/2} q^{1-1/2k} < 2(n-1) + 1 = 2Dq - 1.$$

Ainsi, afin que (9) tienne, il suffit de choisir  $q$  de telle sorte que

$$3D(16k^2 + 1)^{1/2} q^{1-1/2k} < q,$$

ce qui revient à écrire

$$(10) \quad q > (3(16k^2 + 1)^{1/2}D)^{2k}.$$

Observons que (10) entraîne (6).

Puisque les nombres  $d_j D^2 p_j^2$ ,  $j = 1, \dots, 2k$ , sont tous distincts (ceci découlant du fait que les  $d_j p_j^2$  sont distincts), il découle des inégalités (8) et (9) qu'au moins  $k$  des nombres  $d_j D^2 p_j^2$  appartiennent soit à l'intervalle  $](n-1)^2, n^2[$ , soit à l'intervalle  $]n^2, (n+1)^2[$ , et il est clair par ailleurs qu'ils sont tous des nombres puissants. Ainsi, il suffit maintenant de choisir  $q = q_m$  comme étant le plus petit nombre satisfaisant l'inégalité (10). Un tel nombre va aussi satisfaire les inégalités

$$q < (c_1(3(16k^2 + 1)^{1/2}D)^{2k})^{4k} < \exp\{4k \log(c_1(3\sqrt{16k^2 + 1}(16k^2)^{2k})^{2k})\} \\ \leq \exp\{8k^2 \cdot 2k \cdot (1 + o(1)) \cdot \log(16k^2)\} = \exp\{32(1 + o(1))k^3 \log k\},$$

où nous avons utilisé le fait que  $(16k^2 + 1)^{1/2} < c_1 = 8k$ .

Comme  $qD = n$  et comme

$$D < (16k^2)^{2k} = \exp\{2k \log(16k^2)\} = \exp\{4k(1 + o(1)) \log k\},$$

on a

$$n = qD < \exp\{32(1 + o(1))k^3 \log k\}.$$

On obtient ainsi

$$32(1 + o(1))k^3 \log k \geq \log n,$$

de sorte que

$$\frac{32}{3} k^3 \log(k^3) \geq (1 + o(1)) \log n,$$

ce qui montre que

$$k \geq \left(\frac{3}{32}\right)^{1/3} (1 + o(1)) \left(\frac{\log n}{\log \log n}\right)^{1/3},$$

laquelle inégalité entraîne certainement que

$$k \geq \frac{9}{20} \left(\frac{\log n}{\log \log n}\right)^{1/3},$$

pour  $n$  suffisamment grand, puisque  $(3/32)^{1/3} > 9/20$ . Voilà qui complète la preuve du théorème 1.

**4. La preuve du théorème 2.** Soit  $N$  un grand nombre réel positif. Soit  $n \leq N$  et supposons que l'intervalle  $]n^2, (n+1)^2[$  contient effectivement un nombre puissant. On peut alors écrire ce nombre puissant de manière unique sous la forme  $m^3 l^2$ , où  $m$  est un nombre libre de carrés. Il est clair qu'on a alors

$$(11) \quad n = \lfloor m\sqrt{m} \cdot l \rfloor,$$

alors que réciproquement si (11) est satisfaite pour un certain nombre libre de carrés  $m$  et un certain entier positif  $l$ , le nombre puissant correspondant  $m^3 l^2$  est situé dans l'intervalle  $]n^2, (n+1)^2[$ . C'est pourquoi il suffit de compter le nombre de nombres  $n \leq N$  satisfaisant (11) pour un certain nombre  $m$  libre de carrés et un certain entier positif  $l$ .

Pour chaque nombre  $m$  libre de carrés, posons

$$\mathcal{A}_m = \{\lfloor m\sqrt{m} \cdot l \rfloor \leq N : l \geq 1\}.$$

Il nous faut estimer la cardinalité de l'ensemble

$$(12) \quad \mathcal{A} = \bigcup_{\substack{m \geq 1 \\ \mu(m) \neq 0}} \mathcal{A}_m.$$

Soit  $Y$  un paramètre réel qui tend vers l'infini avec  $N$ , d'une manière que l'on indiquera plus tard. Observons que

$$\#\mathcal{A}_m \ll \frac{N}{m^{3/2}},$$

et ainsi que

$$(13) \quad \#\bigcup_{m > Y} \mathcal{A}_m \leq \sum_{m > Y} \#\mathcal{A}_m \ll N \sum_{m > Y} \frac{1}{m^{3/2}} \ll N \int_Y^\infty \frac{dt}{t^{3/2}} \ll \frac{N}{Y^{1/2}}.$$

Pour  $m \leq Y$ , en utilisant le principe d'inclusion-exclusion, nous obtenons

$$(14) \quad \#\bigcup_{\substack{1 < m_1 \leq Y \\ \mu(m_i) \neq 0}} \mathcal{A}_m = \sum_{j \geq 1} (-1)^{j-1} \sum_{\substack{1 < m_1 < \dots < m_j \leq Y \\ \mu(m_i) \neq 0, i=1, \dots, j}} \#\bigcap_{i=1}^j \mathcal{A}_{m_i}.$$

Fixons  $j$  et soit  $1 < m_1 < \dots < m_j \leq Y$  des nombres libres de carrés. Posons  $\alpha_i = m_i^{3/2}$  et  $\beta_i = 1/\alpha_i$  pour  $i = 1, \dots, j$ . Soit  $n \in \bigcap_{i=1}^j \mathcal{A}_{m_i}$ . Il s'ensuit qu'il existe des entiers  $l_i$ , pour  $i = 1, \dots, j$ , tels que les inégalités  $n < \alpha_i l_i < n + 1$  sont satisfaites pour chaque  $i = 1, \dots, j$ . Or, ces dernières inégalités sont équivalentes au fait que les inégalités  $n\beta_i < l_i < n\beta_i + \beta_i$  tiennent aussi pour  $i = 1, \dots, j$ . Il s'ensuit que  $\{n\beta_i\} \in I_i$  pour  $i = 1, \dots, j$ , où pour chaque nombre  $i$ , l'expression  $I_i$  désigne l'intervalle  $(1 - \beta_i, 1)$ . Ici,  $\{x\}$  désigne la partie fractionnaire de  $x$ . Observons que la longueur de  $I_i$  est  $|I_i| = \beta_i$  pour chaque  $i = 1, \dots, j$ .

Il est clair que les nombres  $1, \beta_1, \dots, \beta_j$  sont linéairement indépendants sur  $\mathbb{Q}$ . En fait, les nombres  $1$  et  $m^{-3/2}$ , pour chaque entier  $m > 1$  libre de carrés, sont linéairement indépendants sur  $\mathbb{Q}$  et, en réalité, forment une base pour le corps  $\mathbb{Q}[\sqrt{p} : p \text{ premier}]$ , en tant qu'espace vectoriel sur  $\mathbb{Q}$ .

Pour chaque entier positif  $n \leq N$ , posons  $\mathbf{x}_n := (\{n\beta_1\}, \dots, \{n\beta_j\})$ . Il découle de la théorie de la distribution uniforme des suites multidimensionnelles modulo 1 (voir le chapitre 2 de Kuipers et Niederreiter [2]) que

$$(15) \quad \bigcap_{i=1}^j \mathcal{A}_{m_i} = N \prod_{i=1}^j \beta_i + o(N),$$

où le terme d'erreur dans (15) est

$$(16) \quad \leq ND_{\beta_1, \dots, \beta_j, N}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N),$$

la quantité  $D_{\beta_1, \dots, \beta_j, N}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$  désignant la discrédance de nos suites (de dimensions  $j$ )  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$ . Cette discrédance satisfait l'inégalité

$$(17) \quad D_{\beta_1, \dots, \beta_j, N}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) \leq 2j^2 3^{j+1} \left( \frac{1}{M} + \sum_{0 < \|\mathbf{h}\| \leq M} \frac{1}{r(\mathbf{h})} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i \langle \mathbf{h}, \mathbf{x}_n \rangle} \right| \right).$$

Dans cette dernière inégalité, les notations sont celles utilisées dans le livre de Kuipers et Niederreiter [2], et comme tel,  $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_j)$  est un point à coordonnées entières dans  $\mathbb{R}^j$ ,  $\|\mathbf{h}\| = \max\{|h_i| : i = 1, \dots, j\}$ ,

$$r(\mathbf{h}) = \prod_{i=1}^j \max\{|h_i|, 1\},$$

et  $\langle \mathbf{h}, \mathbf{x}_n \rangle$  désigne le produit scalaire dans  $\mathbb{R}^j$ . Dans l'inégalité (17),  $M$  est un entier positif arbitraire, lequel est habituellement choisi de telle manière qu'il minimise la borne supérieure donnée par le membre de droite de (17) sur  $D_{\beta_1, \dots, \beta_j, N}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$ .

En faisant appel à (13), (14) et (16), on obtient alors

$$(18) \quad V(N) = N - \# \bigcup \mathcal{A}_m \\ = N - N \sum_{j \geq 1} \sum_{\substack{1 < m_1 < \dots < m_j \leq Y \\ \mu(m_i) \neq 0, i=1, \dots, j}} (-1)^{j-1} \prod_{i=1}^j m_i^{-3/2} + O\left(\frac{N}{Y^{1/2}}\right) \\ + O\left(\sum_{j \geq 1} \sum_{\substack{1 < m_1 < \dots < m_j \leq Y \\ \mu(m_i) \neq 0, i=1, \dots, j}} ND_{\beta_1, \dots, \beta_j, N}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)\right) \\ = C_2 N + O\left(\sum_{j \geq 1} \sum_{\substack{1 < m_1 < \dots < m_j > Y \\ \mu(m_i) \neq 0, i=1, \dots, j}} \prod_{i=1}^j m_i^{-3/2}\right) + O\left(\frac{N}{Y^{1/2}}\right) \\ + O\left(\sum_{j \geq 1} \sum_{\substack{1 < m_1 < \dots < m_j \leq Y \\ \mu(m_i) \neq 0, i=1, \dots, j}} ND_{\beta_1, \dots, \beta_j, N}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)\right).$$

Du fait que le produit infini

$$P = \prod_{m \geq 1} \left(1 + \frac{\mu^2(m)}{m^{3/2}}\right)$$

converge, on voit aisément que

$$(19) \quad \sum_{j \geq 1} \sum_{\substack{1 < m_1 < \dots < m_j > Y \\ \mu(m_i) \neq 0, i=1, \dots, j}} \prod_{i=1}^j m_i^{3/2} \leq P \sum_{m \geq Y} m^{-3/2} \ll \int_Y^\infty \frac{dt}{t^{3/2}} \ll \frac{1}{Y^{1/2}},$$

de sorte qu'en comparant (19) avec (18), on obtient

$$(20) \quad N - \# \bigcup \mathcal{A}_m = C_2 N + O\left(\frac{N}{Y^{1/2}}\right) \\ + O\left(\sum_{j \geq 1} \sum_{\substack{1 < m_1 < \dots < m_j \leq Y \\ \mu(m_i) \neq 0, i=1, \dots, j}} ND_{\beta_1, \dots, \beta_j, N}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)\right).$$

Nous estimons maintenant les discrédances  $D_{\beta_1, \dots, \beta_j, N}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$ . Soit  $\mathbb{K}_Y = \mathbb{Q}[\sqrt{p} : p \leq Y, \text{ premier}]$ . Le degré  $[\mathbb{K}_Y : \mathbb{Q}]$  est  $2^{\pi(Y)} < 2^{Y-2}$ . Soit  $D = \prod_{p < Y} p^3 < e^{4Y}/2$ . Comme

$$D \sum_{1 < m_i \leq Y} \beta_i \leq D(\zeta(3/2) - 1) < 2D < e^{4Y},$$

et comme chacun des nombres  $D\beta_i$  est un entier algébrique, il est facile de voir que

$$r(\mathbf{h})^{2Y-2} \langle h_1 \beta_1 + \dots + h_j \beta_j \rangle \geq r(\mathbf{h})^{[\mathbb{K}_Y : \mathbb{Q}]-1} \langle h_1 \beta_1 + \dots + h_j \beta_j \rangle \\ \geq (2D)^{-[\mathbb{K}_Y : \mathbb{Q}]} \geq e^{-Y2^Y}.$$

Il découle alors immédiatement que pour un point à coordonnées entières  $\mathbf{n}$  dans  $\mathbb{R}^j$ , nous avons

$$\sum_{\substack{\mathbf{h} \neq 0 \\ |h_i| \leq n_i}} \langle h_1 \beta_1 + \dots + h_j \beta_j \rangle^{-1} \leq e^{Y2^Y} \prod_{i=1}^j \left( \sum_{|h| \leq n_i} \max\{|h|^{2Y-2}, 1\} \right) \\ \leq e^{Y2^Y} \cdot 2^j \cdot \prod_{i=1}^j n_i^{2Y-1} < e^{Y2^Y+1} r(\mathbf{n})^{2Y-1}.$$

Il s'ensuit donc que

$$(21) \quad \sum_{0 < \|\mathbf{h}\| \leq M} \frac{1}{r(\mathbf{h})} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i \langle \mathbf{h}, \mathbf{x}_n \rangle} \right| \\ \ll \frac{1}{N} \sum_{0 < \|\mathbf{h}\| < M} r^{-1}(\mathbf{h}) \langle h_1 \beta_1 + \dots + h_j \beta_j \rangle^{-1} \\ \ll \frac{1}{N} \sum_{n_1, \dots, n_j=1}^M f(n_1, \dots, n_j) \sum_{\substack{\mathbf{h}=(h_1, \dots, h_j) \\ |h_i| \leq n_i}} \langle h_1 \beta_1 + \dots + h_j \beta_j \rangle^{-1} \\ \ll e^{Y2^Y+1} M^{2Y-1},$$

où pour chaque entier  $n \leq M$ , on a posé  $f(n_1, \dots, n_j) = \prod_{i=1}^j g(n_i)$ , avec

$$g(n) = \begin{cases} \frac{1}{n(n+1)} & \text{si } n < M, \\ \frac{1}{M} & \text{si } n = M \end{cases}$$

(voir à cet effet l'exercice #3.15 de Kuipers et Niederreiter [2]). En ajoutant les inégalités (21) pour tous les  $j$  et  $1 < m_1 < \dots < m_j \leq Y$ , avec  $m_i$  libres de carrés, et en faisant appel à l'inégalité (17), on obtient

$$\sum_{j \geq 1} \sum_{\substack{1 < m_1 < \dots < m_j \leq Y \\ \mu(m_i) \neq 0, i=1, \dots, j}} ND_{\beta_1, \dots, \beta_j, N}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) \ll 2^{\pi(Y)} \cdot 2Y^2 \cdot 3^{Y+1} (N/M + e^{Y2^{Y+1}} M^{2^Y-1}) \ll e^{Y2^{Y+2}} (N/M + M^{2^Y-1}).$$

En posant maintenant  $M = \lfloor N^{1/2^Y} \rfloor$ , on peut alors écrire que

$$(22) \quad \sum_{j \geq 1} \sum_{\substack{1 < m_1 < \dots < m_j \leq Y \\ \mu(m_i) \neq 0, i=1, \dots, j}} ND_{\beta_1, \dots, \beta_j, N}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) \ll e^{Y2^{Y+2}} N^{1-1/2^Y}.$$

En substituant (22) dans (20), on conclut que

$$(23) \quad V(N) = C_2 N + O\left(\frac{N}{Y^{1/2}} + e^{Y2^{Y+2}} \frac{N}{N^{1/2^Y}}\right).$$

Nous pouvons maintenant choisir  $Y$  en le définissant implicitement par l'équation

$$\frac{N}{Y^{1/2}} = e^{Y2^{Y+2}} \frac{N}{N^{1/2^Y}},$$

laquelle est équivalente à

$$N^{1/2^Y} = e^{Y2^{Y+2}} Y^{1/2},$$

ou encore

$$\frac{\log N}{2^Y} = Y2^{Y+2} + \frac{1}{2} \log Y,$$

ce qui entraîne que

$$4Y4^Y(1 + o(1)) = \log N,$$

auquel cas

$$Y(1 + o(1)) \log 4 = \log \log N,$$

de sorte que  $Y = C_3(1 + o(1)) \log \log N$  avec  $C_3 = (\log 4)^{-1}$ . En substituant cette valeur de  $Y$  dans (23), le théorème est démontré.

**Remerciements.** Les auteurs tiennent à remercier Igor Shparlinski pour une observation fort précieuse qui a permis de compléter la preuve du théorème 1.

### Références

- [1] A. Ivić, *The Riemann Zeta-Function. Theory and Applications*, Dover, Mineola, NY, 2003.
- [2] L. Kuipers and H. Niederreiter, *Uniform Distribution of Sequences*, Wiley, New York, 1974.
- [3] G. Ricci, *Ricerche aritmetiche sui polinomi*, Rend. Circ. Mat. Palermo 57 (1933), 433–475.

Département de mathématiques  
Université Laval  
Québec G1K 7P4, Canada  
E-mail: jmdk@mat.ulaval.ca

Mathematical Institute  
UNAM  
Ap. Postal 61-3 (Xangari), CP 58 089  
Morelia, Michoacán, Mexico  
E-mail: fluca@matmor.unam.mx

Reçu le 29.9.2003

(4634)