CONFÉRENCE de CLÔTURE du CONGRÈS

Ces mathématiques qui nous font grandir !

Jean-Marie De Koninck, Université Laval

D'abord, je tiens à remercier les organisateurs de ce Colloque de m'avoir invité à vous adresser la parole dans le cadre de cette réunion annuelle de mathématiciens.

J'aimerais dire un mot sur le thème que j'ai choisi « Ces mathématiques qui nous font grandir ! » J'y crois ! . . . Je crois en effet que sans les mathématiques, il est difficile de s'épanouir dans une société qui est de plus en plus modelée par la technologie... et c'est ce dont je vais vous parler aujourd'hui abondamment. Toutefois, vous entretenir de la place des mathématiques dans notre système d'éducation et des effets bénéfiques des mathématiques sur l'épanouissement de l'individu, n'est pas une tâche facile. Néanmoins, comme il s'agit d'un sujet si passionnant et si stimulant, j'ai décidé de m'y frotter.

D'entrée de jeu, je tiens à souligner que je ne suis pas un expert en didactique des mathématiques à proprement parler. Mais, en tant que mathématicien et enseignant des maths depuis maintenant trois décennies, je m'intéresse beaucoup aux diverses facettes de l'éducation mathématique, tant en ce qui concerne l'enseignement proprement dit que le rôle des mathématiques dans le monde d'aujourd'hui... et de demain !

L'invitation que j'ai reçue est d'autant plus intimidante que je m'adresse ici à plusieurs experts en didactique des mathématiques ainsi qu'à nombre d'enseignants chevronnés qui ont abondamment fait leur preuve. En effet, le Québec se classe régulièrement parmi les meilleurs dans les différents concours et études aux niveaux national et international. Ceci s'explique en bonne partie par le fait que nous avons au Québec une longue et riche tradition de formation des enseignants et que l'accent est beaucoup mis sur la résolution de problèmes.

Par ailleurs, je dois vous avouer que depuis le jour où j'ai accepté votre invitation, j'ai fait un bon bout de chemin... mais pas celui que je croyais initialement faire ! Par conséquent, ce sera probablement plus stimulant pour vous d'entendre un discours qui n'est peut-être pas celui auquel vous vous attendiez.

Enfin, comme vous allez le constater, je vais me permettre de remettre en question la formation mathématique que l'on donne à certains de nos étudiants. Je ne parle pas ici du contenu des cours qu'on livre aux futurs mathématiciens, mais plutôt de celui qu'on dispense à l'ensemble des étudiants des niveaux secondaire et collégial, et qui ne se destinent pas nécessairement vers une carrière de mathématiciens, ou même de scientifiques.

Voici donc le plan de mon exposé. Je vais d'abord vous entretenir de la contribution des mathématiques à notre qualité de vie, en particulier sur le plan intellectuel ; ce sera mon point le plus important. Ensuite, j'aborderai le phénomène de ce que l'on peut appeler l'*analphabétisme numérique*, ses causes et ses effets. En troisième lieu, j'examinerai avec vous diverses stratégies et actions que l'on pourrait envisager pour faire le « marketing » des mathématiques — et oui, n'ayons pas peur des mots. Enfin, je parlerai de l'importance d'humaniser les mathématiques pour changer leur visage, pour améliorer leur image.

Pour préparer cet exposé, j'ai consulté plusieurs ouvrages traitant en particulier de la contribution des mathématiques à notre bien-être quotidien (comme Devlin [5] , [6]), de l'importance des mathématiques dans la formation intellectuelle de l'étudiant (comme Charnay [3] , Courteau et Hodgson [4], Steen [13], [14]) ainsi que dans l'épanouissement du citoyen (comme Paulos [10], [11], [12]). Enfin, j'ai également pris plaisir à puiser différentes données numériques dans plusieurs des ouvrages mentionnés ci-dessus ainsi que dans la revue *Sciences et Avenir* [15].

Cet exposé est aussi le fruit de mes consultations auprès d'experts en enseignement des mathématiques, dont Bernard R. Hodgson, Jean Dionne et Frédéric Gourdeau, que j'ai dérangés à maintes reprises.

La contribution des mathématiques à notre qualité de vie

Les mathématiques sont une merveilleuse aventure humaine qui a débuté il y a plusieurs milliers d'années. Elles font partie de notre héritage culturel. Elles sont à la fois utiles (les Égyptiens, par exemple, en avaient certes besoin pour construire les pyramides), d'une beauté exceptionnelle (comme les Grecs se sont efforcés de nous le démontrer), et en même temps très prospères (car elles évoluent sans cesse dans le temps). Les mathématiques non seulement constituent le fondement de toutes les sciences, mais elles sont aussi présentes dans presque tous les domaines de l'activité humaine, et ce de plus en plus.

C'est bien connu, les mathématiques forment la partie invisible de toutes les sciences ; elles constituent en particulier le langage universel des sciences. Elles sont aussi le moteur qui fait avancer les sciences, qui les fait progresser. Donc, même si elles ne se retrouvent pas toujours au premier plan, elles sont partout. Je donnerai seulement quatre exemples.

- **Le principe de Bernoulli**

  Sans le *principe de Bernoulli*, découvert en 1738 par le mathématicien suisse Daniel Bernoulli, et selon lequel la pression sur un objet se déplaçant dans un fluide diminue avec le carré de la vitesse (i.e. *l'équation de Bernoulli*
  $$P + \frac{\rho v^2}{2} = \text{ cte},$$
  où P, v et ρ désignent respectivement la pression sur l'objet, la vitesse du fluide et sa densité), les avions ne voleraient pas, ou à tout le moins, on ne saurait pas pourquoi ils volent.

- **Le petit théorème de Fermat**

  Sans le *petit théorème de Fermat* découvert par Pierre de Fermat en 1640, selon lequel, pour tout nombre premier $p > 2$, on a que p divise $2^{p-1} - 1$, trois mathématiciens du MIT (Rivest, Shamir et Adleman) n'auraient jamais réussi à développer (en 1977) la méthode RSA, soit la méthode de codage la plus fiable qui existe de nos jours.

- **Les transformées de Fourier rapides**

  Sans les *transformées de Fourier rapides*, dont l'origine remonte à 1807 avec les travaux de Jean-Baptiste Fourier, on ne pourrait pas écouter de la musique sur CD et on ne pourrait pas regarder la télévision numérique.

- **La géométrie non euclidienne**

  Sans la géométrie non euclidienne découverte au début du XIX^{e} siècle par Gauss, Bolyai, Lobachevsky et Riemann, le physicien-mathématicien Albert Einstein n'aurait pas eu à sa disposition le contexte mathématique lui permettant de concevoir sa théorie de la relativité.

Pourtant, quand on prend l'avion, quand on utilise sa carte de crédit sur Internet, quand on écoute la télé ou quand on admire le génie d'Einstein, on fait malheureusement peu de cas du rôle essentiel des mathématiques derrière chacune de ces réalisations.

La beauté des mathématiques

Toutes ces fonctions utilitaires des mathématiques ne constituent pas, pourtant, la seule source de motivation des mathématiciens au cours des siècles. Ils ont souvent été inspirés par des besoins internes aux mathématiques et aussi par la beauté imprégnée dans leur rigueur. En effet, comment ne pas s'émerveiller devant la preuve élémentaire donnée par Euclide de l'infinitude des nombres premiers, ou devant la preuve de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ citée par Aristote, ou devant la preuve d'Euler à l'effet que

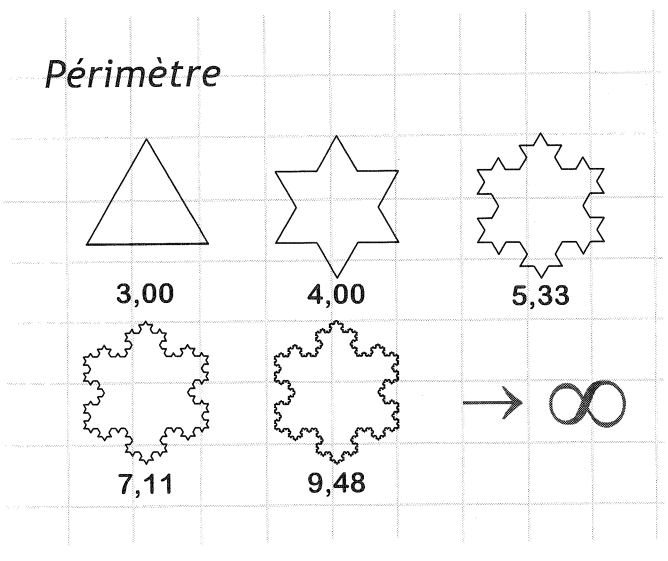
$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6},$$

ou encore devant les propriétés abondantes, remarquables et surprenantes du triangle de Pascal ?

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

Par exemple, il découle du développement du binôme de Newton de $(1+1)^{n-1}$ (respectivement $(1-1)^{n-1}$) que la somme (respectivement la somme alternée) des éléments de la n-ième ligne est égale à 2^{n-1} (respectivement 0, si $n \geq 2$). On peut même établir que la suite des sommes des diagonales, i.e. 1, 1, 1+1, 1+2, 1+3+1, 1+4+3, 1+5+6+1, . . . donne la suite des nombres de Fibonacci ; voir à cet effet les résultats de Hodgson ainsi que de Cassidy et Hodgson [2].

Comment, également, ne pas s'émerveiller en prenant connaissance de la construction du flocon de Koch, cet objet géométrique de périmètre infini, mais d'aire finie, développé dans le cadre de la géométrie fractale ?



Prenons d'ailleurs un moment pour expliquer cette construction du flocon de Koch. On commence avec un triangle équilatéral dont chaque côté est de longueur 1. On construit ensuite un deuxième polygone ayant 12 $(=3\times 4)$ côtés, chacun de longueur 1/3 (voir le dessin ci-haut), puis un troisième polygone à 48 $(=3\times 4\times 4)$ côtés, chacun de longueur $1/9$ $(=(1/3)^2)$, et ainsi de suite. On vérifie facilement que les périmètres successifs de ces polygones sont donnés par la suite de nombres

$$3,\quad 4,\quad 4\times\left(\frac{4}{3}\right),\quad 4\times\left(\frac{4}{3}\right)^2,\quad 4\times\left(\frac{4}{3}\right)^3,\ldots$$

laquelle suite tend vers l'infini.

Le calcul explicite de l'aire du flocon s'obtient en calculant les aires respectives de chacun des polygones mentionnés ci-dessus. En utilisant des notions de base de la trigonométrie, on obtient que l'aire du premier polygone (soit le triangle de départ) est égale à $\frac{\sqrt{3}}{4}$, celle du deuxième à $\left(1+\frac{1}{3}\right)\frac{\sqrt{3}}{4}$, et ainsi de suite. On arrive alors à montrer que l'aire du flocon de Koch est égale à

$$\left(1+\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}(4/9)^k\right)\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{8}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{2}{5}\sqrt{3}\approx 0{,}69282.$$

On a donc ainsi obtenu une courbe dont le périmètre est de longueur infinie et dont l'aire est finie. C'est dire que si on avait un enclos en forme de flocon de Koch, on pourrait acheter assez de peinture pour peinturer la surface de l'enclos, mais jamais assez pour peinturer la clôture qui l'entoure.

Il s'agit là d''un bel exemple où l'intuition peut être prise en défaut si on ne prend pas le temps d'examiner avec soin et avec rigueur toutes les composantes mathématiques du problème.

La qualité de vie sur le plan intellectuel

Un de mes proches est directeur d'une école Montessori à Québec. Récemment, il me racontait que, selon lui, les mathématiques sont le meilleur outil pour acquérir la rigueur intellectuelle et qu'aucun autre domaine du savoir ne permet de la communiquer aussi bien. C'est que chacun de ces domaines développe d'autres habiletés intellectuelles. Par exemple, l'étude du français permet de développer des habiletés de communication, en histoire on apprend à comprendre le comportement des humains en tant que « collectivités », alors qu'en biologie on apprend le respect de la vie et de l'environnement.

J'ajouterai qu'une bonne formation mathématique rapporte encore davantage. À cet effet, j'aimerais vous lire quelques passages d'un article de Bernard Courteau et Bernard Hodgson dont le titre *Mathématiques et société* est tout à fait dans le ton de cette conférence.

> *L'apprentissage des mathématiques fournit aux étudiants des situations contrôlées dans lesquelles ils peuvent s'exercer à [la] logique [de résolution de problèmes]. Par exemple, la résolution d'un problème de géométrie donne à l'élève l'occasion de se poser des questions de base comme : Qu'est-ce que je cherche ? Qu'est-ce qui est donné ? Y a-t-il quelque chose que je connais déjà et qui pourrait être pertinent au problème ? En supposant le problème résolu, puis-je établir une relation entre ce qui est inconnu et ce qui est connu ? Quels outils, raisonnements, analogies, calculs, graphiques, etc. puis-je utiliser pour tirer de cette relation assez d'information en vue de résoudre le problème ? La solution obtenue est-elle unique ou multiple ? Comment vérifier si le problème est bien résolu ? L'intérêt de ces questions résident dans leur universalité : face à tout problème, elles se posent naturellement et on pourrait dire, en simplifiant, que les poser et tenter d'y répondre est le propre d'une attitude rationnelle.*
>
> *Mais il y a plus. Les mathématiques sont un instrument pour dépasser les limites de nos sens, pour rendre accessible ce qui est hors de portée de notre intuition spontanée. Les mathématiques permettent de développer une sorte d'intuition seconde donnant accès à un monde nouveau qui permet en quelque sorte de rêver rationnellement la réalité.*

Ceci étant dit, j'aimerais maintenant donner quatre exemples qui illustrent les bienfaits d'une bonne formation mathématique :

Méfiance face à de faux arguments

Dans le désormais célèbre procès d'O.J. Simpson, l'avocat de la défense, Alan Dershowitz, utilisa comme argument le fait que comme moins d'un homme sur 1 000 qui bat sa conjointe finit un jour par la tuer, alors le jury ne devrait pas tenir compte du fait que O.J. Simpson battait sa femme.

Bien que la statistique citée par l'avocat soit exacte, elle n'a rien à voir avec l'accusation puisqu'elle ne tient pas compte du fait qu'il y a effectivement eu un meurtre. D'ailleurs, il existe une autre donnée dans les statistiques sur les crimes indiquant que si un homme bat sa conjointe et que par la suite celle-ci décède, alors celui qui la battait s'avère être le meurtrier dans 80 % des cas.

Ains, le membre du jury qui a tant soit peu l'esprit logique sera plus méfiant devant une telle argumentation.

En réalité, le problème avec ces faux arguments est qu'ils font souvent mauvais usage d'une implication du type « si . . . , alors . . . ». Ce fait est particulièrement évident dans les publicités de bière, où l'on tente de nous faire croire (à tort !) qu'un groupe d'amis ont du plaisir lors d'un party tout simplement parce qu'ils consomment la marque de bière qui fait l'objet de la publicité. Et nous n'insisterons pas sur l'exemple de la « belle femme » assise sur le capot de la Cadillac...

Un bel exercice d'humilité

Dans le monde dans lequel nous vivons au quotidien, tout est relativement proche (en moins de 24 heures, on peut se retrouver à peu près n'importe où sur notre planète). De plus, comme l'homme occupe une place prépondérante et déterminante dans le fonctionnement de notre société, il finit par se croire au Centre du Monde.

Or, bien que les astronomes nous répètent sans cesse que l'Univers est très vaste et que nous ne sommes que « poussières » dans cette immensité, il nous est difficile de concevoir (ou d'imaginer) la grandeur de l' Univers qui nous entoure.

Pourtant, avec quelques calculs mathématiques très simples, on peut faire un bon pas dans cette direction. Il suffit pour cela d'utiliser deux données qu'on entend souvent :

- le temps que prennent les rayons lumineux du Soleil pour nous atteindre sur Terre est de huit minutes,
- l'étoile la plus proche du Soleil est située à environ quatre années-lumière de la Terre.

C'est donc dire que cette étoile est située à environ $4 \times 365 \times 24 \times 60 = 2\,102\,400$ « minutes-lumière » de la Terre, soit

$$\frac{2\,102\,400}{8} = 262\,800$$

fois plus loin de la Terre que ne l'est le Soleil.

On peut ainsi conclure que, dans un modèle réduit, si je représente la Terre et que le Soleil est à un mètre devant moi, alors, toutes proportions gardées, l'étoile la plus proche est à 262 kilomètres de moi.

Et dire qu'il y a des étoiles situées à des milliards d'années-lumière de la Terre...

Voilà donc un calcul mathématique élémentaire, mais aussi un bel exercice d'humilité pour l'Homme face à l'Univers qu'il habite d'ailleurs bien temporairement !

Attachez vos tuques

Vous roulez sur l'autoroute 20 entre Québec et Montréal. En jetant un coup d'oeil sur votre indicateur de vitesse, vous constatez que vous roulez à 110 km/h. Mais est-ce vraiment la vitesse à laquelle vous vous déplacez ? En fait, cela dépend par rapport à quoi !

- En effet, vous êtes sur la Terre, laquelle tourne sur elle-même, d'Ouest en Est, à la vitesse de 1670 km/h.
- Par ailleurs, la Terre tourne autour du Soleil à une vitesse moyenne de 108 000 km/h, soit environ 27,8 km/sec.
- Notre Soleil tourne autour du centre galactique à la vitesse de 72 000 km/h, soit environ 20 km/sec.
- Notre galaxie, la Voie Lactée, tourne sur elle-même à la vitesse de 972 000 km/h, soit 230 km/sec (pourtant, elle est bien lente, puisque elle fait un tour sur elle-même dans le sens des aiguilles d'une montre en 250 millions d'années: elle en est actuellement à son 18^e^ tour).
- Notre galaxie se déplace dans l'Univers à la vitesse de 2 160 000 km/h, soit 600 km/sec.

Bien sûr, toutes ces données ne sont pas indiquées sur l'indicateur de vitesse de votre voiture, mais il est tout de même bon d'en être conscient !

La rigueur de l'esprit

Alors que certains sont parfois pressés de sauter aux conclusions sur une seule impression, le mathématicien, ou celui qui a obtenu une formation mathématique, sera plus nuancé et prendra le temps d'étudier toutes les données dont il dispose avant de tirer une conclusion.

Par exemple, certains scientifiques du domaine appliqué (mais non mathématiciens), après avoir pris connaissance des égalités suivantes (facilement obtenues à l'aide d'un logiciel de calcul):

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx &= \frac{\pi}{2}\\
\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\frac{\sin(x/3)}{x/3}\,dx &= \frac{\pi}{2}\\
\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\frac{\sin(x/3)}{x/3}\frac{\sin(x/5)}{x/5}\,dx &= \frac{\pi}{2}\\
&\vdots\\
\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\frac{\sin(x/3)}{x/3}\cdots\frac{\sin(x/13)}{x/13}\,dx &= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

seraient vite tentés de conclure que l'on obtiendra toujours $\pi/2$ pour toutes les intégrales de cette forme. Or il n'en est rien puisque, par exemple,

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\frac{\sin(x/3)}{x/3}\cdots\frac{\sin(x/15)}{x/15}\,dx = \frac{467807924713440738696537864469}{935615849440640907310521750000}\pi,$$

laquelle valeur est inférieure à $\pi/2$.

Le mathématicien, lui, aurait été plus sceptique en exigeant par exemple une preuve rigoureuse !

D'ailleurs, il est possible de démontrer qu'étant donné r entiers positifs $h_1 < h_2 < \ldots < h_r$ dont la somme des réciproques est inférieure à 1, alors

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\frac{\sin(x/h_1)}{x/h_1}\cdots\frac{\sin(x/h_r)}{x/h_r}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Et c'était bien le cas ci-dessus avec

$h_1 = 3, h_2 = 5, h_3 = 7, h_4 = 9, h_5 = 11$ et $h_6 = 13$,

puisque

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}=\frac{43024}{45045}<1.$$

Pour en connaître davantage sur ce problème, voir D. Borwein et J. Borwein.

L'analphabétisme numérique

Nous vivons dans un monde qui déborde de chiffres : nous sommes inondés par des statistiques et des données numériques de toutes sortes, et cela n'ira pas en diminuant.

Il suffit de lire ou d'écouter les grands titres des médias écrits ou électroniques : ils utilisent des mesures quantitatives pour nous informer

- des fluctuations du prix de l'essence,
- des hausses et des baisses de la bourse,
- des hausses et des baisses de notre dollar canadien,
- des résultats des plus récents sondages,
- de la compétition au niveau des coûts des différents abonnements aux services de téléphonie cellulaire,
- des risques de mourir d'un cancer de la prostate ou d'un cancer du sein,
- des statistiques de plus en plus compliquées du monde sportif.

Force est de l'admettre, nous sommes à l'ère numérique ! Et ce phénomène de prolifération des chiffres est d'ailleurs amplifié depuis l'arrivée des ordinateurs. Ainsi il s'est vendu jusqu'ici, soit depuis le début des années 1970, environ un milliard de micro-ordinateurs. On estime que d'ici 2008, un deuxième milliard de micro-ordinateurs sera vendu.

Par ailleurs, les découvertes mathématiques ne cessent de se multiplier. Selon Devlin , en l'an 1900, il aurait suffi de 80 volumes pour inclure toutes les connaissances mathématiques de l'époque, alors que 100 ans plus tard, il nous faudrait environ 100 000 volumes pour contenir toutes les mathématiques connues.

Cette croissance exponentielle n'est pas sans effet sur la façon dont fonctionne notre société, ni sur la façon dont chacun de nous fonctionne à l'intérieur de cette société.

Or, même si le rôle joué par les nombres et les données numériques dans notre société contemporaine est pratiquement sans fin, il existe pourtant une quantité importante d'adultes ayant bénéficié d'une solide formation académique qui fonctionnent au quotidien avec peu d'habileté numérique, avec un sens du nombre tout au moins déficient. Mais, fonctionnent-ils vraiment bien ? Voilà une question que nous allons maintenant aborder.

Beaucoup de nos étudiants quittent le niveau secondaire avec une compréhension des nombres bien en deça de ce dont ils auront besoin pour vivre et travailler adéquatement dans notre société d'aujourd'hui.

En particulier, les grands gestionnaires déplorent souvent le manque d'habiletés quantitatives de leurs employés.

Il en résulte que notre société forme beaucoup d'employés « jetables ». En effet, l'employé « mal formé » est appelé à perdre éventuellement son emploi, car il n'est plus en mesure de répondre aux attentes et besoins de l'entreprise (par exemple, parce que la technologie a beaucoup évolué). À l'opposé, l'employé qui a bénéficié d'une formation mathématique et donc qui a *appris à apprendre* sera capable de s'adapter ou de s'ajuster à l'avancement technologique... et n'est donc pas « jetable » ; il peut même parfois devenir indispensable !

Le besoin pour le citoyen ordinaire d'être « numériquement instruit »

Pour le citoyen ordinaire, cette avalanche de données numériques a du BON et du MAUVAIS. C'est BON, s'il est capable de comprendre les données qui lui tombent dessus et qu'il est capable de les interpréter. Par contre, c'est MAUVAIS s'il subit cette avalanche de chiffres sans pouvoir les comprendre, sans pouvoir y donner suite.

Comme on va maintenant le voir par quelques exemples concrets, ne pas arriver à comprendre ou à interpréter certaines données numériques peut s'avérer très néfaste pour le citoyen.

Gare aux arnaques !

Plusieurs charlatans profitent de l'ignorance d'une bonne partie de la population en ce qui a trait aux chiffres.

Voici une arnaque que pourrait réaliser un courtier pas très honnête. Celui-ci écrit à 64 000 personnes. À la moitié d'entre eux, il annonce que cette semaine, le Dow Jones va monter ; et à l'autre moitié, il annonce que le Dow Jones va baisser. Forcément, l'un des deux phénomènes va se produire. Il retient les 32 000 personnes à qui il a fait la bonne prédiction et leur envoie une nouvelle prédiction pour la deuxième semaine. À la moitié d'entre eux, il annonce que le Dow Jones va grimper, aux 16 000 autres, il annonce qu'il va chuter. Et ainsi de suite, à chaque étape, il conserve ceux à qui il a déjà annoncé le bon résultat. Après cinq envois, il a ainsi dit la vérité à 2 000 personnes. C'est à ce moment qu'il demande à chacun d'entre eux 500 $ en échange de sa nouvelle prédiction, en prenant bien soin de leur rappeler qu'il a prédit avec justesse les cinq premières fois. Si seulement la moitié de ces personnes lui font confiance, il vient de leur soutirer un beau 500 000 $.

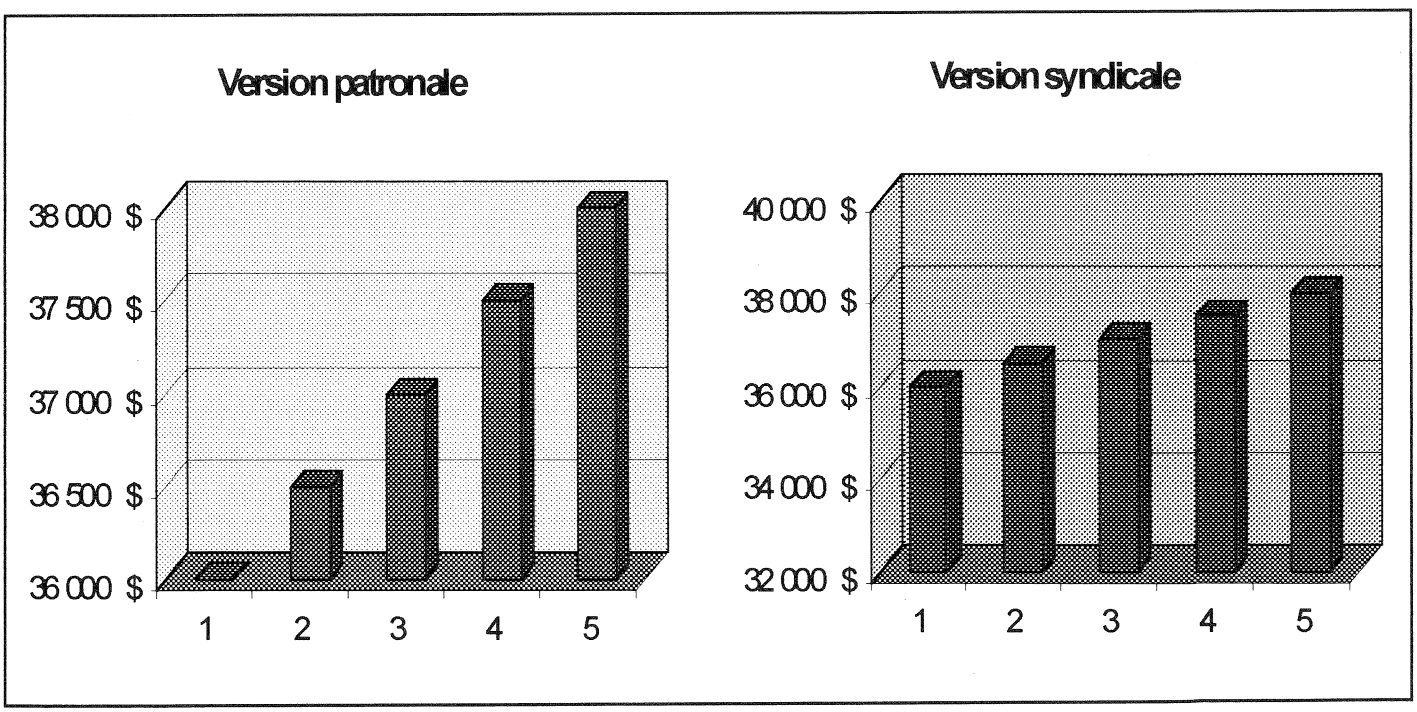
À plus grande échelle, notre société est exposée à toutes sortes de charlatans qui exploitent la crédulité des pauvres gens, pauvres au plan intellectuel, i.e. au plan de la rigueur et de la logique. Je pense entre autres aux « preachers » américains (au moins 45 millions d'Américains les écoutent), aux diseuses de cartes ou aux concepteurs d'horoscopes.

Une lecture critique des données numériques

Une bonne formation mathématique permet à l'individu de faire une lecture critique des données numériques qui lui sont livrées.

Plaçons-nous, par exemple, dans le contexte d'une négociation de convention collective où l'employeur propose à ses employés une progression des salaires sur une période de cinq ans, soit 500 $ d'augmentation par année. Les deux graphiques ci-dessous livrent exactement la même information brute. Toutefois, le graphique de gauche (présenté par la partie patronale) veut montrer une forte progression des salaires sur cinq ans, tandis que le graphique de droite (présenté par la partie syndicale) veut signifier une progression plus modeste des salaires pour la même période.

Il s'agit donc là du problème classique de la représentation d'information par des graphiques, où on peut truquer les choses: un ouvrage célèbre à cet effet est le livre de Darrell Huff intitulé *How to Lie with Statistics*.



Avoir le sens du numérique

Deux jus de tomates de même qualité sont placés sur le comptoir de votre épicerie ; vaut-il mieux acheter le contenant de 800 ml vendu à 3 \$ ou celui de 900 ml vendu à 3,50 \$?

Avec l'aide de votre calculatrice, vous additionnez dix nombres de deux chiffres. Le total vous donne un nombre qui excède 2 000. Est-ce plausible, ou alors y a-t-il quelque chose qui cloche ?

Voilà deux situations courantes pour lesquelles il est utile d'être capable de manipuler les nombres, d'être capable d'approximer, somme toute d'avoir le sens du numérique.

On entend souvent que les dinosaures sont disparus depuis 65 millions d'années ; on aura tous compris qu'on veut dire par là « approximativement 65 millions d'années », n'est-ce pas ? Peut-être pas pour tous ! En effet, on raconte qu'un jour, le guide d'un musée annonce à ses visiteurs que les ossements du dinosaure placé au fond du musée sont vieux de 65 000 005 ans. Questionné par un visiteur perplexe devant un nombre aussi précis, le guide lui confirme qu'il travaille au musée depuis cinq ans et qu'on lui avait bien indiqué à ce moment-là que les ossements étaient vieux de 65 millions d'années...

Taux de change

Qui n'a pas un jour à voyager et donc à convertir son argent canadien, disons, en argent américain ?

On entend souvent le raisonnement suivant : si notre dollar canadien vaut 65 cents en argent américain, cela veut dire que le dollar américain vaut 1,35 \$ en argent canadien.

La réalité est que

$$x = \frac{65}{100}y \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{100}{65}x \approx 1,54,$$

donc que le dollar américain vaut 1,54 \$ en argent canadien.

L' *analphabète numérique* voit ici un processus additif, alors qu'il s'agit d'une proportion, donc d'un processus multiplicatif. Il ne faut donc pas se demander « de combien une chose est-elle plus grande qu'une autre ? », mais plutôt « combien de fois une chose est-elle plus grande qu'une autre ? ».

L'exemple qui suit montre bien que les médias contribuent parfois à semer la confusion.

Un mauvais calcul de probabilité

On est vendredi soir. Le lecteur du bulletin de la météo, après avoir annoncé qu'il y a 50 % de chances qu'il pleuve samedi et ensuite 50 % de chances qu'il pleuve dimanche, conclut qu'il y a 100 % de chances qu'il pleuve en fin de semaine...

Les abus de nos gouvernements

Le fait que notre société est composée en bonne partie d'*analphabètes numériques* sert malheureusement trop souvent les intérêts de ceux qui nous gouvernent, tout comme au Moyen-Âge, lorsque la population était peu instruite, elle était plus facilement manipulée par les monarques.

Voici d'ailleurs un exemple qui nous touche abondamment, nous les Québécois. On sait tous que nos chances de gagner à la loterie 6/49 sont assez faibles. On peut même calculer cette probabilité avec une grande précision. Comme il existe

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{6!\ 43!} = 13\,983\,816$$

combinaisons de 49 nombres pris six à la fois, c'est dire qu'on a une chance sur environ 14 millions de gagner à la 6/49. Donc, nos chances sont si faibles qu'on a en réalité plus de chances de se faire frapper par la foudre deux fois que de gagner à cette loterie !

Loto Québec est bien consciente de ces statistiques et continue pourtant de profiter de l'ignorance des pauvres gens qui « investissent » chaque mois des centaines de dollars dans les loteries. Voilà certainement qui explique en bonne partie le fait que Loto Québec peut remettre annuellement environ un milliard et demi de dollars au gouvernement québécois.

Le phénomène de l'anxiété mathématique

Il existe dans notre société le mythe que « les maths, c'est pour une certaine élite ». Et, pour certains qui ne sont pas à l'aise avec les nombres, les mathématiques ne sont qu'un mauvais souvenir de collège. Voilà qui explique entre autres pourquoi plusieurs ont développé une véritable anxiété vis-à-vis des mathématiques, que l'on ne peut pas ignorer et qu'il nous faut contrer.

D'abord, il est faux que les maths doivent être réservées à une certaine élite : c'est comme si on disait aux étudiants d'oublier leur français s'ils ne projettent pas devenir écrivains ou professeurs de français.

De plus, si les maths sont un mauvais souvenir de collège, c'est qu'il y a un décrochage « mathématique », et la raison de cette coupure est qu'on n'a pas réussi à conserver l'intérêt, qu'on n'a probablement pas réussi à garder l'étudiant en contact avec le réel. En effet, le véritable défi du bon enseignant est de motiver par des exemples concrets chaque notion mathématique, d'utiliser des métaphores, somme toute de constamment garder l'étudiant connecté à la réalité du monde qui l'entoure.

Certes, l'étudiant très doué pourrait très bien absorber les mathématiques à un niveau d'abstraction plus élevé sans être constamment nourri d'exemples concrets. Toutefois, il s'accommodera fort bien d'une telle approche pédagogique, quitte à ce que l'enseignant prenne soin de soulever à l'occasion l'existence de problèmes et de questions plus complexes.

Nos étudiants

Je divise les effectifs étudiants de nos écoles secondaires et collégiales en quatre catégories :

- Les futurs mathématiciens
- Les futurs scientifiques (sciences pures non-math et sciences appliquées)
- Les futurs professionnels
- Le futur citoyen (qui a besoin de concepts mathématiques pour fonctionner comme citoyen).

Il va de soi que cette dernière catégorie recoupe les trois premières.

Bien sûr, aux niveaux secondaire et collégial, il est difficile de rattacher à l'une ou l'autre de ces catégories l'étudiant que l'on a devant soi. Et il va de soi que la profondeur des connaissances mathématiques dont aura besoin un étudiant dépend de son choix de carrière, lequel choix est rarement fait au niveau du secondaire. Toutefois, le dénominateur commun des futurs besoins de tous nos étudiants est certes une certain niveau d'habileté numérique, dont le processus d'acquisition occupe relativement peu de place dans la formation qu'on livre à nos étudiants. D'où l'importance de distinguer entre la formation à accorder à un futur mathématicien et celle à accorder à un futur non mathématicien, l'un ayant un mode de pensée bien différent de l'autre. Ainsi, alors que le mathématicien est la plupart du temps à l'aise avec des notions très abstraites, par contraste, le non-mathématicien cherche davantage à rester connecté au monde qui l'entoure.

En tant qu'enseignants, nous devrions à tout le moins être conscients des différents modes de pensée de nos étudiants.

Stratégies et actions à envisager

Voici en vrac quelques stratégies et actions que l'on pourrait envisager pour, d'une part contrer le phénomène de l'analphabétisme numérique, et d'autre part faire le « marketing » des mathématiques.

- Prendre conscience des besoins spécifiques de chacune des quatre catégories d'étudiants mentionnées ci-dessus.

- Enseigner les mathématiques en restant le plus possible en contact avec la réalité de tous les jours, dans le sens expliqué ci-dessus.

- Considérer la possibilité d'organiser des échanges de professeurs. Par exemple, un professeur d'une université pourrait donner quelques séminaires dans un collège pendant une semaine, période durant laquelle un professeur de ce collège pourrait joindre les rangs des étudiants de maîtrise et de doctorat à l'université, lui permettant ainsi de se familiariser avec les mathématiques avancées. De telles initiatives auraient sûrement des retombées bénéfiques pour la formation des étudiants.

- Organiser davantage de conférences « grand public » et inviter les universitaires à écrire quelques articles de vulgarisation portant sur leurs travaux de recherche. En d'autres termes, il serait souhaitable d'encourager le chercheur à descendre de sa tour d'ivoire pour aller rencontrer le citoyen (qui a bien droit de savoir ce que fait le chercheur, ne fusse que parce qu'il paye des taxes pour que ce dernier obtienne des subventions de recherche).

- Utiliser les médias pour vulgariser les mathématiques. Ceci aurait au moins pour effet indirect de sensibiliser les parents, lesquels ont souvent une grande influence sur les choix académiques de leurs enfants.

L'humanisation des mathématiques

Les mathématiques sont trop souvent perçues comme une science très abstraite. Pourtant, derrière chaque notion mathématique et chaque découverte mathématique, il y a des êtres humains passionnés par leur science. C'est pourquoi, je crois que l'on devrait

- d'une part, utiliser l'histoire des mathématiques pour enseigner les notions de mathématiques, par exemple en introduisant leurs auteurs et le contexte historique dans lequel ils ont travaillé (voir, par exemple, Katz),

- d'autre part, présenter le côté humain et sympathique de grands mathématiciens qui ont marqué leur époque, comme Robert Recorde, Blaise Pascal, Isaac Newton, Leonhard Euler, Sophie Germain et Seymour Cray.

Le principal objectif d'une telle démarche est de donner un visage humain aux mathématiques et ainsi de les rendre plus « sympathiques » auprès des étudiants.

Conclusion

Je vous ai donc entretenu aujourd'hui du rôle important joué par les mathématiques dans l'évolution de notre société sur le plan technologique. J'ai aussi voulu vous sensibiliser au rôle des mathématiques comme agent de développement et d'épanouissement de la personne.

Mais, j'ai surtout voulu vous rappeler que faire des mathématiques, c'est une passion, et que la passion ça se communique ! ■

Références bibliographiques

[1] Borwein, D. et Borwein, J. (2001). *Some remarkable properties of sinc and related integrals*. Ramanujan J., 5 (1), p. 73-89.

[2] Cassidy, C. et Hodgson, B.R. (1994). On some properties of Fibonacci diagonals in Pascal's triangle. *Fibonacci Quarterly*, 32 (2), p. 145-152.

[3] Charnay, R. (1999). *Pourquoi des mathématiques à l'école ?* ESF.

[4] Courteau, B. et Hodgson, B.R. (2000). Mathématiques et société. Dans *Mathématiques, An 2000*. Montréal, Association mathématique du Québec et Institut des sciences mathématiques, p. 20-22.

[5] Devlin, K. (1998). *Life by the Numbers*. New York (NY), Wiley.

[6] Devlin, K. (2001). *The Language of Mathematics: Making the Invisible Visible*. San Francisco, W.H. Freeman.

[7] Hodgson, B.R. (1992). On some number sequences related to the parity of binomial coefficients. *Fibonacci Quarterly*, 30 (1), p. 35-47.

[8] Huff, D. (1954). *How to Lie with Statistics*. New York (NY), W.W. Norton & Company.

[9] Katz, V. (2000). *Using History to Teach Mathematics*. Wshington (DC), Mathematical Association of America.

[10] Paulos, J.A. (1989). *Innumeracy : Mathematical Illiteracy and its Consequences*. New York (NY), Hill and Wang.

[11] Paulos, J.A. (1992). *Beyond Numeracy*. New York (NY), Vintage Books.

[12] Paulos, J.A. (1995). *A Mathematician Reads the Newspaper*. New York (NY), Basic Books.

[13] Steen, L.A. (1997). *Why Numbers Count*. New York (NY), The College Board.

[14] Steen, L.A. (2001). *Mathematics and Democracy : The Case for Quantitative Literacy*. Princeton (NJ), National Council on Education and the Disciplines.

[15] Sciences et Avenir, août 2002.

Jean-Marie De Koninck
Département de mathématiques et de statistique
Université Laval
Québec, Québec G1K 7P4
jmdk@mat.ulaval.ca