

L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

REVUE INTERNATIONALE

FONDÉE EN 1899

Organe officiel
de la Commission internationale de l'Enseignement Mathématique

2^e SÉRIE

TOME 42 — FASCICULE 1-2

Janvier-juin 1996

GENÈVE
IMPRIMERIE SRO-KUNDIG
1996

ISSN 0013 - 8584

MOYENNES SUR CERTAINS ENSEMBLES DE DIVISEURS D'UN ENTIER

par Jean-Marie DE KONINCK et Jacques GRAH¹⁾

ABSTRACT. Given an arithmetical function f , we examine the average value of $f(d)$ as d runs through subsets of the divisors d of an integer n . In particular, we study the functions $\bar{f}(n) = \frac{1}{\tau(n)} \sum_{d|n} f(d)$, $\hat{f}(n) = \frac{1}{2^{\omega(n)}} \sum_{\substack{d|n \\ d \text{ squarefree}}} f(d)$ and $\tilde{f}(n) = \frac{1}{2^{\omega(n)}} \sum_{\substack{d|n \\ (d, n/d) = 1}} f(d)$, where $\tau(n)$ is the number of divisors of n and $\omega(n)$ stands for the number of distinct prime factors of n , and show that their arithmetic properties resemble those of f .

1. INTRODUCTION

Soit \mathbf{F} l'ensemble des fonctions arithmétiques. On dit que $f \in \mathbf{F}$ est *additive* si $f(mn) = f(m) + f(n)$ lorsque $(m, n) = 1$. Si $n = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \dots q_r^{\alpha_r}$ est la décomposition canonique de n , alors les fonctions $\omega(n) = \sum_{p|n} 1 = r$, $\Omega(n) = \sum_{i=1}^r \alpha_i$ et $\log n$ sont additives. Lorsque l'égalité $f(mn) = f(m) + f(n)$ est valable pour tous les entiers positifs m et n , on dit que f est *totale additive*. Si en plus d'être additive, f satisfait $f(p^\alpha) = f(p)$ pour chaque nombre premier p et tout $\alpha \in \mathbf{N}$, on qualifie f de *fortement additive*.

Une fonction $f \in \mathbf{F}$ est dite *multiplicative* si $f(mn) = f(m)f(n)$ lorsque $(m, n) = 1$. C'est le cas des fonctions $\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)}$, $\tau(n) = \prod_{i=1}^r (\alpha_i + 1)$, $\phi(n) = \sum_{\substack{m \leq n \\ (m, n) = 1}} 1$, $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$, $1(n) = 1 \forall n \geq 1$, $\delta(n) = q_1 q_2 \dots q_r$ (qu'on

¹⁾ Travail supporté en partie par une subvention du CRSNG et une subvention du programme FCAR. 1991 Mathematics Subject Classification: 11A25, 11N37.

appelle «noyau de n »), de la fonction de Moebius $\mu(n)$ définie par

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } p^2 \mid n \text{ pour un certain nombre premier } p \\ (-1)^r & \text{si } n = q_1 q_2 \dots q_r; q_i \text{ premiers distincts} \end{cases}$$

et enfin de la fonction $E(n)$ qui vaut 1 si $n = 1$, et 0 autrement. Lorsque l'égalité $f(mn) = f(m)f(n)$ est valable pour tous les entiers positifs m et n , f est dite *totalelement multiplicative*. Une fonction multiplicative f telle que $f(p^\alpha) = f(p)$ pour chaque nombre premier p et tout $\alpha \in \mathbb{N}$ est dite *fortement multiplicative*. On désigne par \mathcal{M} (respectivement par \mathcal{EM} et par \mathcal{FM}) l'ensemble des fonctions multiplicatives (respectivement l'ensemble des fonctions totalelement multiplicatives et l'ensemble des fonctions fortement multiplicatives). De même, on désigne par \mathcal{A} , \mathcal{EA} et \mathcal{FA} les ensembles des fonctions additives, totalelement additives et fortement additives.

Très souvent, étant donné une fonction arithmétique f , on est appelé à étudier des expressions de la forme

$$(1.1) \quad \sum_{d \mid n} f(d), \quad \sum_{\substack{d \mid n \\ d \text{ libre de carrés}}} f(d), \quad \sum_{(d, n/d) = 1} f(d),$$

où, dans chaque cas, l'argument de f parcourt tous les diviseurs de l'entier positif n ou encore un sous-ensemble de ses diviseurs; la troisième somme de (1.1) parcourt ce qu'on appelle communément les diviseurs unitaires de l'entier n .

Notre étude portera d'abord sur les fonctions arithmétiques \bar{f} , \hat{f} et \tilde{f} , associées à une fonction arithmétique f donnée, et définies respectivement par

$$(1.2) \quad \bar{f}(n) := \frac{1}{\tau(n)} \sum_{d \mid n} f(d), \quad \hat{f}(n) := \frac{1}{2^{\omega(n)}} \sum_{\substack{d \mid n \\ d \text{ libre de carrés}}} f(d), \\ \tilde{f}(n) := \frac{1}{2^{\omega(n)}} \sum_{(d, n/d) = 1} f(d).$$

En effet l'étude des sommes du type (1.1) et celle des sommes correspondantes (1.2) s'avèrent être deux problèmes analogues; toutefois les sommes (1.2) ont l'avantage d'avoir une interprétation «plus naturelle» en ce sens que chacune d'elles représente une moyenne de la fonction f lorsque son argument parcourt un sous-ensemble particulier de diviseurs de l'entier n . De plus, comme on le verra ci-dessous, les sommes du type (1.2) possèdent des propriétés arithmétiques qui rendent leur étude beaucoup plus facile que celles du type (1.1).

Les trois fonctions \bar{f} , \hat{f} et \tilde{f} représentent donc la moyenne des valeurs de f prises respectivement sur les diviseurs de n , sur les diviseurs libres de carrés et sur les diviseurs unitaires de n . Par exemple si $f(n) = 2^{\omega(n)}$ alors $\bar{f}(n) = \tau(n^2)/\tau(n)$. Si $f(n) = \Lambda(n) = \log p$ si $n = p^m$ (pour un certain p premier et $m \geq 1$), 0 autrement, alors $\bar{f}(n) = \bar{\Lambda}(n) = \hat{\Lambda}(n) = \log(\delta(n))/2^{\omega(n)}$ et $\bar{\Lambda}(n) = \log(n)/\tau(n)$. Il est également facile de vérifier que $\hat{\Lambda}(n) = E(n)$, $\bar{\omega}(n) = \sum_{p^\alpha \parallel n} \alpha/(1+\alpha) = \omega(n) - \sum_{p^\alpha \parallel n} 1/(1+\alpha)$, $\hat{\omega}(n) = \bar{\omega}(n) = \omega(n)/2 = \hat{\omega}(n)$ et que $\bar{1} = \hat{1} = \tilde{1} = 1$. Plusieurs autres exemples seront exposés dans cet article.

Nous étudierons donc ici les propriétés arithmétiques des fonctions f , \bar{f} et \tilde{f} . C'est ainsi qu'à la section 2, on démontre que, vues comme des opérateurs sur l'ensemble \mathbf{F} , ces fonctions «héritent» du caractère additif de la fonction originale f , ou de son caractère multiplicatif, selon le cas.

Réciproquement, de (1.2), on montre que f hérite du caractère additif ou multiplicatif des fonctions \bar{f} , et \tilde{f} . En effet, en utilisant la notation habituelle $f * g$ pour désigner le produit de Dirichlet des fonctions arithmétiques f et g , et $*_u$ la restriction de $*$ aux diviseurs unitaires, alors, si $f \in \mathbf{F}$ telle que $\bar{f} \in \mathcal{A}$, des égalités $f = \tau \bar{f} * \mu$ et $\mu * \tau = 1$, on déduit facilement que $f \in \mathcal{A}$. Pour $\tilde{f} \in \mathcal{A}$ les identités $f = 2^{\omega} \tilde{f} *_u (-1)^{\omega}$ et $(-1)^{\omega} *_u 2^{\omega} = 1$ permettent d'établir l'additivité de f . Lorsque les fonctions \bar{f} et \tilde{f} appartiennent à \mathcal{M} , on obtient la multiplicativité de f directement à partir des formules d'inversion de Moebius sans faire appel aux identités $\mu * \tau = 1$ et $(-1)^{\omega} *_u 2^{\omega} = 1$.

Nous traitons, à la section 3, des liens qui existent entre la valeur moyenne de f sur un intervalle donné $[1, x]$ et celles des fonctions \bar{f} , \hat{f} et \tilde{f} . Ainsi on établit que lorsque $f \in \mathcal{FA}$ et satisfait certaines conditions de régularité, alors \bar{f} n'est pas nécessairement dans \mathcal{FA} , mais pourtant f possède une valeur moyenne si et seulement si \bar{f} en possède une. On complète cette section avec l'étude du comportement des itérations successives $\bar{f}, \bar{\bar{f}}, \bar{\bar{\bar{f}}}, \dots$

La question naturelle de l'écart, pour un entier naturel n , entre $f(n)$ et chacune des quantités $\bar{f}(n)$, $\hat{f}(n)$ et $\tilde{f}(n)$, est soulevée à la section 4. On démontre que ces écarts, interprétés comme des fonctions arithmétiques, préservent l'additivité, ce qui permet d'analyser plus facilement leur ordre de grandeur.

Enfin, à la section 5, étant donné une fonction arithmétique f , on considère des sous-ensembles de diviseurs d'un entier n qui ont la propriété d'être «multiplicatifs» et on introduit la notion de moyenne des valeurs de

la fonction f sur ces ensembles de diviseurs de n . Certains des résultats établis dans cette section donnent d'ailleurs lieu à plusieurs identités surprenantes.

Les auteurs remercient le rapporteur dont les nombreuses suggestions leur ont été utiles pour la version définitive de ce travail.

2. PROPRIÉTÉS ARITHMÉTIQUES DE \bar{f} , \hat{f} ET \tilde{f}

On définit sur \mathbf{F} les opérateurs \bar{T} , \hat{T} et \tilde{T} par $\bar{T}(f) := \bar{f}$, $\hat{T}(f) := \hat{f}$ et $\tilde{T}(f) := \tilde{f}$.

Du prochain résultat, il découle en particulier que toute fonction arithmétique est elle-même la «moyenne» d'une autre fonction arithmétique.

THÉORÈME 2.1. *L'opérateur \bar{T} établit une bijection de \mathbf{F} sur \mathbf{F} . Il en est de même pour l'opérateur \tilde{T} .*

Démonstration. Pour chaque $f \in \mathbf{F}$,

$$\bar{T}(f) = \bar{f} = \frac{1}{\tau} (1 * f) \quad \text{si et seulement si } f = \mu * \tau \bar{f}$$

$$\text{et } \tilde{T}(f) = \tilde{f} = \frac{1}{2^\omega} (1 *_u f) \quad \text{si et seulement si } f = (-1)^\omega *_u 2^\omega \tilde{f},$$

d'où le résultat.

EXEMPLES. Ainsi il est intéressant de se demander quelles sont les images par l'opérateur \bar{T}^{-1} ou par l'opérateur \tilde{T}^{-1} de certaines fonctions arithmétiques classiques, soit par exemple les fonctions ω , Λ , $\lambda(n)$ et $E(n)$. On vérifie successivement que

$$\omega(n) = \overline{(\omega + k)}(n), \quad \text{où } k(n) = \sum_{p|n} 1,$$

$$\Lambda(n) = \overline{g}(n), \quad \text{où } g(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 1, \\ (-1)^{\omega(n)} \sum_{p|n} \log \frac{1}{p^2} & \text{si } n > 1, \end{cases}$$

$$\lambda(n) = \overline{\lambda(n)\tau(n^2)},$$

$$E(n) = \overline{\mu}(n) = \hat{\mu}(n).$$

L'opérateur \hat{T} n'est pas injectif. En effet, si on pose $g_1(n) = \tau(n)/n$, $g_2(n) = 2^{\omega(n)}/n$ et $g_3(n) = 2^{\Omega(n)}/n$ alors

$$\begin{aligned} \hat{g}_1(n) &= \hat{g}_2(n) = \hat{g}_3(n) = \frac{1}{2^{\omega(n)}} \prod_{p|n} (1 + 2/p) \\ &= \frac{1}{\delta(n) 2^{\omega(n)}} \prod_{p|n} (1 + \sigma(p)) = \frac{\hat{\sigma}(n)}{\delta(n)}. \end{aligned}$$

Les opérateurs \bar{T} , \hat{T} et \tilde{T} préservent la multiplicativité et l'additivité. On a en effet le résultat suivant.

THÉORÈME 2.2. *Si f est dans \mathcal{A} (respectivement dans \mathcal{M}), alors les fonctions \bar{f} , \hat{f} et \tilde{f} sont chacune dans \mathcal{A} (respectivement dans \mathcal{M}).*

Avant de donner la démonstration du théorème, voyons par des exemples les allures que prennent \bar{f} , \hat{f} et \tilde{f} pour des fonctions f additives et multiplicatives.

EXEMPLES

1) On démontre facilement avec le théorème 2.2 que

$$\bar{\lambda}(n) = \bar{\lambda}(n)\tau(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m^2, \\ 0 & \text{autrement,} \end{cases}$$

soit la fonction caractéristique de l'ensemble des carrés parfaits.

2) Parfois, il arrive que $\bar{f}(n) = \tilde{f}(n)$; ainsi on a

$$\bar{\tau}(n) = \tilde{\tau}(n) = \frac{\tau(n\delta(n))}{2^{\omega(n)}} = \prod_{p^\alpha|n} (1 + \alpha/2)$$

et

$$\bar{\Omega}(n) = \tilde{\Omega}(n) = \frac{\Omega(n)}{2}.$$

Démonstration du théorème 2.2. Si $f \in \mathcal{M}$, la démonstration est presque immédiate. Nous allons établir la preuve uniquement pour \bar{f} , dans le cas où $f \in \mathcal{A}$; les cas des fonctions \hat{f} et \tilde{f} , avec $f \in \mathcal{A}$, sont presque identiques. Soit donc $f \in \mathcal{A}$ et soit n et m deux entiers positifs relativement premiers, alors

$$\begin{aligned} f(mn) &= \frac{1}{\tau(mn)} \sum_{d|mn} f(d) = \frac{1}{\tau(m)\tau(n)} \sum_{\substack{d_1|n \\ d_2|m}} f(d_1 d_2) \\ &= \frac{1}{\tau(m)\tau(n)} \sum_{\substack{d_1|n \\ d_2|m}} (f(d_1) + f(d_2)) \\ &= \frac{1}{\tau(m)\tau(n)} \sum_{\substack{d_1|n \\ d_2|m}} f(d_1) + \frac{1}{\tau(m)\tau(n)} \sum_{\substack{d_1|n \\ d_2|m}} f(d_2) \\ &= \frac{1}{\tau(m)\tau(n)} \sum_{d_1|n} f(d_1) \sum_{d_2|m} 1 + \frac{1}{\tau(m)\tau(n)} \sum_{d_2|m} f(d_2) \sum_{d_1|n} 1 \\ &= \bar{f}(n) + \bar{f}(m). \end{aligned}$$

Le résultat est ainsi démontré pour \bar{f} .

REMARQUE. La réciproque du théorème 2.2, comme nous l'avons montré dans l'introduction, est vraie pour \bar{f} et pour \hat{f} . Montrons par un exemple que ce n'est pas le cas de la fonction \hat{f} . Soit f la fonction définie par

$$f(n) = \begin{cases} 2^{\omega(n)} & \text{si } p^2 | n, \\ \omega(n) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est clair que f n'est pas additive; or il est facile de voir que $\hat{f}(n) = \hat{\omega}(n) = \frac{\omega(n)}{2} \in \mathcal{A}$, puisque $\hat{f}(n)$ est indépendante des valeurs de $f(d)$ où $d|n$ avec $\mu(d) = 0$. C'est pourquoi $\hat{f} \in \mathcal{A} \neq f \in \mathcal{A}$.

Il est intéressant de signaler qu'en général $\bar{f}(n) \neq f(n)$. En effet, il est facile de démontrer que, quelle que soit la fonction arithmétique f ,

$$\bar{f}(n) = f(n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow f \equiv c, \text{ pour une certaine constante } c.$$

La même affirmation est valable dans le cas des fonctions \hat{f} et \bar{f} . Une observation plus générale sera faite à la section 5.

Par ailleurs, si $f \in \mathcal{A}$,

$$\begin{aligned} \bar{f}(n) &= \sum_{p^\alpha | n} \frac{1}{\alpha + 1} \sum_{m=1}^{\alpha} f(p^m), \\ \hat{f}(n) &= \frac{1}{2} \sum_{p|n} f(p) = \frac{1}{2} f(\delta(n)) \\ \text{et } \tilde{f}(n) &= \frac{1}{2} f(n). \end{aligned}$$

Si $f \in \mathcal{C}\mathcal{A}$, alors $\bar{f}(n) = \tilde{f}(n) = f(n)/2$. Mentionnons également que lorsque $f \in \mathcal{F}\mathcal{A}$,

$$\bar{f}(n) = \sum_{p^\alpha | n} \frac{\alpha}{1 + \alpha} f(p) = f(n) - \sum_{p^\alpha | n} \frac{1}{1 + \alpha} f(p);$$

en particulier, si f est à valeurs positives, on a les inégalités $\frac{1}{2}f(n) \leq \bar{f}(n) < f(n)$, ce qui est équivalent à $\tilde{f}(n) < f(n) \leq 2\bar{f}(n)$.

Par ailleurs si $f \in \mathcal{M}$, alors

$$\begin{aligned} \bar{f}(n) &= \frac{1}{\tau(n)} \prod_{p^\alpha | n} \left(1 + \sum_{m=1}^{\alpha} f(p^m) \right), \\ \hat{f}(n) &= \frac{1}{2^{\omega(n)}} \prod_{p|n} (1 + f(p)) \\ \text{et } \tilde{f}(n) &= \frac{1}{2^{\omega(n)}} \prod_{p^\alpha | n} (1 + f(p^\alpha)). \end{aligned}$$

Lorsque $f \in \mathcal{F}\mathcal{M}$,

$$\begin{aligned} \bar{f}(n) &= \frac{1}{\tau(n)} \prod_{p^\alpha | n} (1 + \alpha f(p)) \\ \text{et } \tilde{f}(n) &= \hat{f}(n) = \frac{1}{2^{\omega(n)}} \prod_{p|n} (1 + f(p)). \end{aligned}$$

Enfin si $f \in \mathcal{C}\mathcal{M}$, alors $\bar{f}(n) = \frac{1}{2^{\omega(n)}} \prod_{p^\alpha | n} (1 + f(p)^\alpha)$.

Il découle donc de ces observations que \bar{T} préserve le caractère totalement additif alors que \hat{T} applique les ensembles \mathcal{A} et \mathcal{M} respectivement sur $\mathcal{F}\mathcal{A}$ et sur $\mathcal{F}\mathcal{M}$. En particulier $\mathcal{F}\mathcal{A}$ et $\mathcal{F}\mathcal{M}$ sont des ensembles invariants par rapport à l'opérateur \hat{T} en ce sens que pour chaque $f \in \mathcal{F}\mathcal{A}$, $\hat{T}(f) \in \mathcal{F}\mathcal{A}$, et que pour chaque $f \in \mathcal{F}\mathcal{M}$, $\hat{T}(f) \in \mathcal{F}\mathcal{M}$. Par ailleurs, l'opérateur \bar{T} préserve les caractères totalement additif, fortement additif et fortement multiplicatif des fonctions arithmétiques qui ont ces propriétés avec la particularité que $\bar{T} = \hat{T}$ sur $\mathcal{F}\mathcal{A}$ ainsi que sur $\mathcal{F}\mathcal{M}$.

Le prochain résultat précise que si $f \in \mathcal{M}$ alors $f(\delta(n))$ est le quotient de deux fonctions chacune d'elles étant une moyenne sur les diviseurs libres de carrés.

THÉORÈME 2.3. Soit $f \in \mathcal{M}$ telle que $f(n) \neq 0, \forall n \geq 1$ et posons $g = 1/f$, alors

$$(2.1) \quad \hat{f}(n) = f(\delta(n)) \hat{g}(n).$$

Sous les mêmes hypothèses, on obtient l'équivalent de (2.1) pour \tilde{f} à savoir

$$\tilde{f}(n) = f(n) \tilde{g}(n).$$

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{M}$ telle que $f(n) \neq 0, \forall n \geq 1$, alors avec la notation $g = 1/f$, on obtient

$$\begin{aligned} \hat{f}(n) &= \frac{1}{2^{\omega(n)}} \prod_{p|n} (1 + f(p)) = \frac{f(\delta(n))}{2^{\omega(n)}} \prod_{p|n} \left(1 + \frac{1}{f(p)} \right) \\ &= \frac{f(\delta(n))}{2^{\omega(n)}} \sum_{d|n} \mu^2(d) g(d) = f(\delta(n)) \hat{g}(n). \end{aligned}$$

EXEMPLE. Si on pose $f(n) = \frac{\phi(n)}{n}$ alors $g(n) = \frac{n}{\phi(n)}$ et $\hat{f}(n) = \frac{\phi(n)}{n} \hat{g}(n)$ suit immédiatement de (2.1). Comme ici $f(n) = \frac{\phi(n)}{n} \in \mathcal{F}\mathcal{M}$, on a également $\tilde{f}(n) = f(n) \tilde{g}(n)$.

REMARQUE. Vu que si $f(n) = \frac{\phi(n)}{n}$ alors $\tilde{f}(n) = f(n) \frac{1}{f}(n)$ et comme l'opérateur \tilde{T} est bijectif, il existe une fonction $h \in \mathcal{M}$ telle que $\tilde{h}(n) = 1/\left(\frac{1}{f}\right)(n)$. On établit facilement (par la formule d'inversion sur les diviseurs unitaires mentionnée ci-dessus) que $h(n) = \prod_{p|n} (1 - 2/2p - 1)$. C'est donc dire que $\frac{\phi(n)}{n}$ s'écrit comme le produit de deux moyennes sur les diviseurs unitaires, puisque, dans ce cas, $\frac{\phi(n)}{n} = \tilde{f}(n)\tilde{h}(n)$. De façon générale, grâce à la bijectivité de \tilde{T} , on peut exprimer toute fonction $f \in \mathcal{M}$ comme produit de deux moyennes sur les diviseurs unitaires, l'une d'elles étant \tilde{f} .

Désignons maintenant par \circ l'opérateur classique de composition des applications. On peut facilement vérifier que $(\tilde{T} \circ \tilde{T})(\mu) = (\tilde{T} \circ \tilde{T})(\mu)$. Ce constat n'est pas exclusif à la fonction μ , comme l'indique le résultat suivant.

THÉORÈME 2.4. Soit $g \in \mathcal{A} \cup \mathcal{M}$, alors $(\tilde{T} \circ \tilde{T})(g) = (\tilde{T} \circ \tilde{T})(g)$, i.e. $\tilde{\tilde{g}} = \tilde{g}$. En particulier \tilde{T} et \tilde{T} commutent sur l'ensemble des combinaisons linéaires des fonctions $g \in \mathcal{A} \cup \mathcal{M}$.

Démonstration. Nous allons maintenant établir la preuve dans le cas $g \in \mathcal{M}$. Le cas $g \in \mathcal{A}$ se traite de manière analogue et utilise le fait que les opérateurs \tilde{T} et \tilde{T} sont linéaires. Soit donc $g \in \mathcal{M}$, alors $\tilde{T}(g) = \tilde{g} \in \mathcal{M}$ et $\tilde{T}(\tilde{g}) = \tilde{\tilde{g}} \in \mathcal{M}$, avec

$$\tilde{T}(g)(p^\alpha) = \tilde{g}(p^\alpha) = \frac{1}{\alpha + 1} \sum_{m=0}^{\alpha} g(p^m)$$

$$\text{et } \tilde{T}(\tilde{g})(p^\alpha) = \tilde{\tilde{g}}(p^\alpha) = \frac{1}{2} (1 + g(p^\alpha))$$

d'où

$$\begin{aligned} (\tilde{T} \circ \tilde{T})(g)(n) &= \tilde{T}[\tilde{T}(g)](n) = \tilde{T}(\tilde{g})(n) = \prod_{p^\alpha|n} \frac{1}{2} (1 + \tilde{g}(p^\alpha)) \\ (2.2) \quad &= 2^{-\omega(n)} \prod_{p^\alpha|n} \left(1 + \frac{1}{\alpha + 1} \sum_{m=0}^{\alpha} g(p^m)\right) \\ &= \frac{2^{-\omega(n)}}{\tau(n)} \prod_{p^\alpha|n} \left(1 + \alpha + \sum_{m=0}^{\alpha} g(p^m)\right). \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} (\tilde{T} \circ \tilde{T})(g)(n) &= \tilde{T}(\tilde{\tilde{g}})(n) = \prod_{p^\alpha|n} \left(\frac{1}{\alpha + 1} \sum_{m=0}^{\alpha} \tilde{\tilde{g}}(p^m)\right) \\ (2.3) \quad &= \frac{1}{\tau(n)} \prod_{p^\alpha|n} \left(\sum_{m=0}^{\alpha} 2^{-1} (1 + g(p^m))\right) \\ &= \frac{2^{-\omega(n)}}{\tau(n)} \prod_{p^\alpha|n} \left(1 + \alpha + \sum_{m=0}^{\alpha} g(p^m)\right). \end{aligned}$$

L'égalité entre (2.2) et (2.3) équivaut à $\tilde{\tilde{g}} = \tilde{g}$. Et le théorème est démontré.

EXEMPLES

1) On a vu dans l'introduction que si $f(n) = 2^{\omega(n)}$ alors $\tilde{f}(n) = \frac{\tau(n^2)}{\tau(n)}$, d'où

$$\tilde{\tilde{f}}(n) = \frac{1}{2^{\omega(n)}} \prod_{p^\alpha|n} \left(1 + \frac{\tau(p^{2\alpha})}{\tau(p^\alpha)}\right) = \prod_{p^\alpha|n} \left(1 + \frac{\alpha}{2(\alpha + 1)}\right).$$

D'autre part,

$$\tilde{f}(n) = \left(\frac{3}{2}\right)^{\omega(n)} \text{ et } \tilde{\tilde{f}}(n) = \frac{1}{\tau(n)} \prod_{p^\alpha|n} \left(1 + \frac{3}{2} \alpha\right) = \frac{\tau(n^3 \delta(n))}{2^{\omega(n)} \tau(n)}.$$

Or d'après le théorème 2.4 on a l'égalité $\tilde{\tilde{f}}(n) = \tilde{f}(n)$; donc en particulier

$$\frac{\tau(n^3 \delta(n))}{2^{\omega(n)} \tau(n)} = \prod_{p^\alpha|n} \left(1 + \frac{\alpha}{2(\alpha + 1)}\right).$$

2) Comme

$$\tilde{\tilde{\lambda}}(n) = \tilde{\tilde{\lambda}}(n) \tau(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m^2, \\ 0 & \text{autrement,} \end{cases}$$

Il suit du théorème 2.4 que

$$\tilde{\tilde{\lambda}}(n) = \tilde{\tilde{\lambda}}(n) = \frac{1}{2^{\omega(n)}} \prod_{\substack{p^\alpha|n \\ \alpha \text{ pair}}} \left(1 + \frac{1}{\alpha + 1}\right).$$

3. VALEURS MOYENNES DE \bar{f} , \hat{f} ET \tilde{f}

Soit f une fonction arithmétique. S'il existe une fonction continue monotone g définie sur $[1, +\infty[$ et telle que $\sum_{n \leq x} f(n) \sim \sum_{n \leq x} g(n)$, lorsque $x \rightarrow \infty$, on dit que g est une *valeur moyenne* (ou un *ordre moyen*) de f .

On dit qu'une fonction mesurable $R: [2, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}^+$ est une fonction à *variation régulière* s'il existe un nombre réel $\rho \geq 0$ tel que pour chaque $a > 0$ on a $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{R(ax)}{R(x)} = a^\rho$. Compte tenu de la nature des applications consi-

dérées ci-dessous, nous n'étudions que les fonctions continûment dérivables à variation régulière. Si $\rho = 0$, on dit que R est à *oscillation lente*. Désignons par \mathcal{L} l'ensemble des fonctions continûment dérivables à oscillation lente. On peut montrer (voir le livre de Seneta [7], p. 2) que toute fonction à variation régulière R peut s'écrire sous la forme $R(x) = x^\rho L(x)$, où $\rho \in \mathbf{R}$ et $L \in \mathcal{L}$. Il est démontré dans Seneta ([7], p. 7) que $L \in \mathcal{L}$ si et seule-

ment si $\frac{xL'(x)}{L(x)} = o(1)$ lorsque $x \rightarrow \infty$. Nous utiliserons l'expression fonction régulière pour signifier fonction à variation régulière. Si la fonction g ci-dessus est régulière, on dit que la fonction arithmétique f possède une valeur moyenne régulière.

Voyons maintenant dans quel sens on pourra dire que la valeur moyenne régulière de f est unique. D'abord signalons que si f possède deux valeurs moyennes monotones régulières R et S alors R et S sont asymptotiquement équivalentes. En effet, soit $R(x) = x^{\rho_1} L_1(x)$ et $S(x) = x^{\rho_2} L_2(x)$ (où L_1 et L_2 sont deux fonctions à oscillation lente) telles que, lorsque $x \rightarrow \infty$,

$$x^{-1} \sum_{n \leq x} f(n) \sim x^{-1} \sum_{n \leq x} R(n) \quad \text{et} \quad x^{-1} \sum_{n \leq x} f(n) \sim x^{-1} \sum_{n \leq x} S(n).$$

On ne restreint pas la généralité en supposant $\rho_1, \rho_2 > -1$. On a alors $\sum_{n \leq x} n^{\rho_1} L_1(n) \sim \sum_{n \leq x} n^{\rho_2} L_2(n)$, et il s'ensuit que $\int_1^x t^{\rho_1} L_1(t) dt$

$\sim \int_1^x t^{\rho_2} L_2(t) dt$. En utilisant un résultat classique dû à Karamata (voir Bingham, Goldie and Teugels [2], p. 26), on en déduit que

$$\frac{x^{\rho_1+1}}{\rho_1+1} L_1(x) \sim \frac{x^{\rho_2+1}}{\rho_2+1} L_2(x) \quad \text{et ainsi que} \quad x^{\rho_1-\rho_2} \sim \frac{\rho_1+1}{\rho_2+1} \frac{L_1(x)}{L_2(x)}.$$

Mais puisque L_1 et $L_2 \in \mathcal{L}$, il vient $\frac{\rho_1+1}{\rho_2+1} \frac{L_1(x)}{L_2(x)} = x^{o(1)}$, ce qui permet de conclure que $\rho_1 = \rho_2 + o(1)$ c'est-à-dire $\rho_1 = \rho_2$, ce qui implique $R(x) = S(x)$ lorsque $x \rightarrow \infty$.

Compte tenu de ces observations, on peut considérer que la valeur moyenne régulière, lorsqu'elle existe, d'une fonction arithmétique f est unique. Dans un tel cas, c'est donc sans ambiguïté qu'on désignera sa valeur moyenne régulière par $VM(f)$.

THÉORÈME 3.1. Soit $f \in \mathcal{FA}$. Alors:

- (i) la fonction f possède une valeur moyenne si et seulement si la fonction \hat{f} en possède une;
- (ii) la fonction f possède une valeur moyenne si et seulement si la fonction \tilde{f} en possède une.

De plus, si l'une ou l'autre de ces valeurs moyennes existe et est régulière, on a

$$(3.1) \quad VM(f) = 2VM(\hat{f}) = 2VM(\tilde{f}).$$

Démonstration. Les parties (i) et (ii) ainsi que les égalités (3.1) découlent immédiatement du fait que $\hat{f} = \tilde{f} = \frac{1}{2}f$ pour toute fonction $f \in \mathcal{FA}$.

THÉORÈME 3.2. Soit $f \in \mathcal{FA}$ telle que $f(p) = R(p)$ pour chaque nombre premier p , où R est une fonction continûment dérivable à variation régulière non décroissante qui possède la représentation $R(x) = x^\rho L(x)$, avec $\rho \geq 0$ et $L \in \mathcal{L}$. Alors la valeur moyenne régulière de la fonction f existe si et seulement si celle de la fonction \bar{f} existe, auquel cas

$$(3.2) \quad VM(f) = 2VM(\bar{f}).$$

Avant d'entreprendre la démonstration du théorème 3.2, nous établissons d'abord un lemme d'intérêt général qui s'avère crucial pour la démonstration de ce théorème.

LEMME 3.3. Soit $\varphi: [1, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}^+$ une fonction continue non décroissante telle que $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = +\infty$. Alors

$$\int_1^x \frac{\varphi(t)}{t^2} dt = o(\varphi(x)).$$

Démonstration. Soit φ une fonction satisfaisant les hypothèses du lemme. Pour tout x assez grand, on pose

$$y(x) := \inf\{y: \varphi(y) = \sqrt{\varphi(x)}\}.$$

Il est clair que $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = +\infty$.

Puisque φ est non décroissante on a

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{\varphi(t)}{t^2} dt &= \int_1^{y(x)} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt + \int_{y(x)}^x \frac{\varphi(t)}{t^2} dt \leq \varphi(y(x)) \int_1^{y(x)} \frac{dt}{t^2} + \varphi(x) \int_{y(x)}^x \frac{dt}{t^2} \\ &= \varphi(y(x)) \left(1 - \frac{1}{y(x)}\right) + \varphi(x) \left(\frac{1}{y(x)} - \frac{1}{x}\right) \\ &\leq \sqrt{\varphi(x)} \left(1 - \frac{1}{y(x)}\right) + \varphi(x) \left(\frac{1}{y(x)} - \frac{1}{x}\right) \\ &< \sqrt{\varphi(x)} + \frac{\varphi(x)}{y(x)} = o(\varphi(x)), \end{aligned}$$

car $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = +\infty$, ce qui complète la preuve du lemme 3.3.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3.2. D'abord, puisque $f \in \mathcal{F}\mathcal{A}$, il est facile d'établir que

$$(3.3) \quad \sum_{n \leq x} f(n) = \sum_{p \leq x} f(p) \left[\frac{x}{p}\right] = \sum_{p \leq x} R(p) \left[\frac{x}{p}\right].$$

Par ailleurs, toujours parce que $f \in \mathcal{F}\mathcal{A}$, on a

$$\bar{f}(n) = \sum_{p^\alpha | n} \frac{\alpha}{1 + \alpha} f(p) = \sum_{p^\alpha | n} \frac{\alpha}{1 + \alpha} R(p)$$

ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \bar{f}(n) &= \sum_{n \leq x} \sum_{p^\alpha | n} \frac{\alpha}{1 + \alpha} R(p) = \sum_{n \leq x} \sum_{\substack{p^\alpha | n \\ \alpha \geq 1}} \left(\frac{\alpha}{1 + \alpha} - \frac{\alpha - 1}{\alpha}\right) R(p) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n \leq x} \sum_{p | n} R(p) + \sum_{n \leq x} \sum_{\substack{p^\alpha | n \\ \alpha \geq 2}} \frac{1}{\alpha(\alpha + 1)} R(p) \end{aligned}$$

et donc d'obtenir

$$(3.4) \quad \sum_{n \leq x} \bar{f}(n) = \frac{1}{2} \sum_{p \leq x} R(p) \left[\frac{x}{p}\right] + \sum_{\substack{p^\alpha \leq x \\ \alpha \geq 2}} \frac{1}{\alpha(1 + \alpha)} R(p) \left[\frac{x}{p^\alpha}\right].$$

Considérons d'abord le cas où la fonction $R(x) = x^\rho L(x)$ est telle que $\rho = 0$. On a alors

$$(3.5) \quad \sum_{p \leq x} R(p) \left[\frac{x}{p}\right] = \sum_{p \leq x} L(p) \left[\frac{x}{p}\right] = x \sum_{p \leq x} \frac{L(p)}{p} + O\left(\sum_{p \leq x} L(p)\right).$$

Or, en utilisant le théorème des nombres premiers sous la forme

$$\pi(x) = \frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right), \text{ on a}$$

$$\begin{aligned} \sum_{p \leq x} \frac{L(p)}{p} &= \int_2^x \frac{L(t)}{t} d\pi(t) = \frac{L(t)}{t} \pi(t) \Big|_2^x - \int_2^x \pi(t) \frac{d}{dt} \left(\frac{L(t)}{t}\right) dt \\ (3.6) \quad &= \frac{L(x)}{\log x} + O\left(\frac{L(x)}{\log^2 x}\right) + (1 + o(1)) \int_2^x \frac{t}{\log t} \frac{L(t)}{t^2} \left(1 - \frac{tL'(t)}{L(t)}\right) dt \\ &= \frac{L(x)}{\log x} + O\left(\frac{L(x)}{\log^2 x}\right) + (1 + o(1)) \int_2^x \frac{L(t)}{t \log t} (1 - \eta(t)) dt, \end{aligned}$$

où $\eta(t) := \frac{tL'(t)}{L(t)} \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$, puisque $L \in \mathcal{L}$. Or, étant donné une fonction $M \in \mathcal{L}$, il a été démontré par De Koninck et Mercier ([3], lemme 3) que

$$M(x) = o\left(\int_2^x \frac{M(t)}{t} dt\right).$$

En utilisant ce résultat avec $M(x) = \frac{L(x)}{\log x}$, (3.6) devient

$$(3.7) \quad \sum_{p \leq x} \frac{L(p)}{p} = (1 + o(1)) \int_2^x \frac{L(t)}{t \log t} dt.$$

Puisque le terme d'erreur $O\left(\sum_{p \leq x} L(p)\right)$ qui apparaît dans (3.5) est $o\left(x \int_2^x \frac{L(t)}{t \log t} dt\right)$, la relation (3.3) devient

$$(3.8) \quad \sum_{n \leq x} f(n) = (1 + o(1)) xN(x),$$

$$\text{où } N(x) := \int_2^x \frac{L(t)}{t \log t} dt.$$

Par ailleurs il est clair que

$$(3.9) \quad \sum_{\substack{p^a \leq x \\ a \geq 2}} \frac{1}{\alpha(\alpha+1)} L(p) \left[\frac{x}{p^\alpha} \right] < x \sum_{\substack{p \\ a \geq 2}} \frac{L(p)}{p^\alpha} \ll x.$$

Enfin, puisque L est non décroissante, on a

$$N(x) = \int_2^x \frac{L(t)}{t \log t} dt \geq L(2) \int_2^x \frac{dt}{t \log t} dt \\ = L(2) \log \log x + O(1) \rightarrow +\infty \text{ lorsque } x \rightarrow \infty.$$

En combinant alors (3.3), (3.4), (3.5), (3.8) et (3.9), on obtient le résultat, incluant l'égalité (3.2), dans le cas où $R = L \in \mathcal{L}$.

Il reste à considérer le cas où $R(x) = x^\rho L(x)$, avec $\rho > 0$. Comme $x - 1 < [x] \leq x$, on a

$$\frac{1}{2} \sum_{p \leq x} R(p) \left(\frac{x}{p} - 1 \right) < \frac{1}{x} \sum_{p \leq x} R(p) \left[\frac{x}{p} \right] \leq \sum_{p \leq x} \frac{R(p)}{p} =: \psi(x)$$

et donc

$$\psi(x) - \frac{1}{x} \sum_{p \leq x} R(p) < \frac{1}{x} \sum_{p \leq x} R(p) \left[\frac{x}{p} \right] \leq \psi(x).$$

Or en utilisant les représentations

$$\sum_{p \leq x} \frac{R(p)}{p} = \int_2^x \frac{R(t)}{t} d\pi(t) \quad \text{et} \quad \sum_{p \leq x} R(p) = \int_2^x R(t) d\pi(t)$$

et en utilisant le théorème des nombres premiers, tout comme on l'a fait dans le cas $R(p) = L(p)$ ci-dessus, on établit que, lorsque $x \rightarrow \infty$,

$$\psi(x) \sim \frac{x^\rho L(x)}{\rho \log x} \quad \text{et} \quad \frac{1}{x} \sum_{p \leq x} R(p) \sim \frac{x^\rho L(x)}{\rho + 1 \log x},$$

de sorte que les trois quantités $\psi(x)$, $\frac{1}{x} \sum_{p \leq x} R(p)$ et $\psi(x) - \frac{1}{x} \sum_{p \leq x} R(p)$ sont du même ordre de grandeur. Ainsi, compte tenu des relations (3.3) et (3.4), la démonstration sera terminée si l'on peut démontrer que le deuxième terme à droite de (3.4) est $o(x\psi(x))$. Le résultat sera donc démontré si l'on arrive à établir l'implication générale suivante:

$$(3.10) \quad T(n) \geq 0, \quad \varphi(x) \rightarrow +\infty, \quad S(x) := \sum_{n \leq x} T(n) \sim \varphi(x) \\ \Rightarrow \sum_{n \leq x} \frac{T(n)}{n} = o(\varphi(x)).$$

Or cette dernière somme peut s'écrire comme suit:

$$(3.11) \quad \sum_{n \leq x} \frac{T(n)}{n} = \sum_{n \leq x} \frac{S(n) - S(n-1)}{n} = \sum_{n \leq x} S(n) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \frac{S([x])}{[x] + 1} \\ = \sum_{n \leq x} \frac{S(n)}{n(n+1)} + o(\varphi(x)) \sim \int_1^x \frac{\varphi(t)}{t^2} dt + o(\varphi(x)).$$

Ainsi compte tenu de (3.11), l'implication (3.10) est une conséquence immédiate du lemme 3.3. Ceci termine la démonstration du théorème 3.2.

R. L. Duncan a montré (voir [4]) qu'en moyenne, la moyenne de ω sur les diviseurs de n est égale à $\frac{1}{2} \log \log n$. Plus précisément Duncan a démontré qu'il existe une constante c telle que

$$x^{-1} \sum_{n \leq x} \left(\frac{1}{\tau(n)} \sum_{d|n} \omega(d) \right) = x^{-1} \sum_{n \leq x} \bar{\omega}(n) = \frac{1}{2} \log \log x + c + O\left(\frac{1}{\log x}\right).$$

A cette fin, Duncan a utilisé la relation asymptotique bien connue

$$(3.12) \quad \sum_{n \leq x} \omega(n) = \sum_{n \leq x} \sum_{p|n} 1 = \sum_{p \leq x} \left[\frac{x}{p} \right] = x \log \log x + Cx + O(x/\log x),$$

où $C := \gamma + \sum_p \left(\log(1 - p^{-1}) + \frac{1}{p} \right)$ et γ est la constante d'Euler. Bien plus encore, Duncan a établi l'égalité des ordres normal et moyen de $\bar{\omega}(n)$.

Etant donné $f \in \mathbb{F}$, il est naturel d'examiner le comportement de la suite $\bar{f}, \bar{\bar{f}}, \bar{\bar{\bar{f}}}, \dots$. Ainsi, pour un entier non négatif m fixé, on considère l'itération \bar{T}_m définie par

$$\bar{T}_m(f) = \bar{T}(\bar{T}_{m-1}(f)) = \dots = \bar{T}_{m-1}(\bar{T}_1(f)) = \bar{T}_{m-1}(\bar{f}) \\ \text{où } \bar{T}_1 = \bar{T}, \bar{T}_0(f) = f, \text{ et où}$$

$$(\bar{T}_m(f))(n) = \frac{1}{\tau(n)} \sum_{d|n} (\bar{T}_{m-1}(f))(d), n \geq 1.$$

Pour simplifier la notation, on désigne par \bar{f}_m l'image de f par \bar{T}_m , i.e. $\bar{T}_m(f) = \bar{f}_m$. Nous définissons de même les itérations \hat{f}_m et \tilde{f}_m et obtenons alors par induction sur m , compte tenu des propriétés de \bar{T} , \hat{T} et \tilde{T} , l'énoncé suivant.

THÉORÈME 3.4. Soit m un entier non négatif et f une fonction arithmétique. Alors \bar{T}_m, \hat{T}_m et \tilde{T}_m préservent l'additivité et la multi-

plativité. En particulier si $f \in \mathcal{A}$ alors $\bar{f}_m(n) = f(n)/2^m$ et $\hat{f}_m(n) = f(\delta(n))/2^m$. Lorsque $f \in \mathcal{C}\mathcal{A}$, $\bar{f}_m(n) = \hat{f}_m(n) = f(n)/2^m$. Enfin si $f \in \mathcal{F}\mathcal{A}$, $\hat{f}_m(n) = \bar{f}_m(n) = f(n)/2^m = f(\delta(n))/2^m$.

Afin de généraliser le résultat de Duncan, nous aurons besoin du lemme suivant qui est facile à démontrer.

LEMME 3.5. Soit $f \in \mathcal{A}$. Supposons que f est constante sur l'ensemble \mathcal{P} des nombres premiers et qu'elle satisfait à $f(p^r) - f(p^{r-1}) = O(1)$ uniformément pour p premier et $r \geq 2$. Alors les expressions $\bar{f}_m(p^r) - \bar{f}_m(p^{r-1})$, $\hat{f}_m(p^r) - \hat{f}_m(p^{r-1})$ et $\tilde{f}_m(p^r) - \tilde{f}_m(p^{r-1})$ sont également bornées uniformément pour p premier et $r \geq 2$. De plus les fonctions \bar{f}_m , \hat{f}_m et \tilde{f}_m sont constantes sur \mathcal{P} .

A chaque fonction g constante sur \mathcal{P} , on associe les constantes suivantes

$$c_g := g(2) \quad \text{et} \quad D_g := c_g C + \sum_{r \geq 2} \sum_p \frac{g(p^r) - g(p^{r-1})}{p^r},$$

où C est la constante de la relation (3.12).

THÉORÈME 3.6. Soit f une fonction additive satisfaisant les hypothèses du lemme 3.5. Alors

$$x^{-1} \sum_{n \leq x} \bar{f}_m(n) = \frac{c_f}{2^m} \log \log x + D_{\bar{f}_m} + O(1/\log x),$$

$$x^{-1} \sum_{n \leq x} \hat{f}_m(n) = \frac{c_f}{2^m} x^{-1} \sum_{n \leq x} \omega(n) = \frac{c_f}{2^m} \log \log x + \frac{c_f}{2^m} C + O(1/\log x),$$

$$x^{-1} \sum_{n \leq x} \tilde{f}_m(n) = \frac{c_f}{2^m} \log \log x + \frac{D_f}{2^m} + O(1/\log x).$$

Démonstration. Si $g \in \mathcal{A}$ et est constante sur \mathcal{P} , on a

$$\begin{aligned} x^{-1} \sum_{n \leq x} g(n) &= x^{-1} \sum_{n \leq x} \sum_{p^r | n} g(p^r) = x^{-1} \sum_{n \leq x} \sum_{\substack{p^r | n \\ r \geq 1}} (g(p^r) - g(p^{r-1})) \\ &= x^{-1} c_g \sum_{p \leq x} \left[\frac{x}{p} \right] + x^{-1} \sum_{\substack{p^r \leq x \\ r \geq 2}} (g(p^r) - g(p^{r-1})) \left[\frac{x}{p^r} \right]. \end{aligned}$$

Alors la relation (3.12) et le lemme 3.5 permettent d'obtenir les égalités du théorème si on prend soin de remplacer successivement g par \bar{f}_m , \hat{f}_m et \tilde{f}_m .

EXEMPLE. Si $f(n) = \log \tau(n)$ et $m = 1$, alors

$$\begin{aligned} x^{-1} \sum_{n \leq x} \bar{f}(n) &= \frac{\log 2}{2} \log \log x + \frac{\log 2}{2} C \\ &+ \sum_{r \geq 2} \sum_p \frac{1}{r(r+1)p^r} \log \left(\frac{(r+1)^r}{r!} \right) + O(1/\log x). \end{aligned}$$

4. MESURE DE L'ÉCART ENTRE f ET LES MOYENNES \bar{f} , \hat{f} ET \tilde{f}

Nous allons étudier le moment d'ordre deux (selon le sens des définitions des moyennes \bar{f} , \hat{f} et \tilde{f}) de l'écart entre $\bar{f}(n)$, $\hat{f}(n)$ et $\tilde{f}(n)$ et les valeurs de f sur les diviseurs de n .

Etant donné une fonction arithmétique f , on lui associe les trois opérateurs

$$\bar{\Delta} f(n) := \frac{1}{\tau(n)} \sum_{d|n} (f(d) - \bar{f}(n))^2,$$

$$\hat{\Delta} f(n) := \frac{1}{2^{\omega(n)}} \sum_{d|n} \mu^2(d) (f(d) - \hat{f}(n))^2,$$

$$\tilde{\Delta} f(n) := \frac{1}{2^{\omega(n)}} \sum_{\substack{d|n \\ (d, n/d) = 1}} (f(d) - \tilde{f}(n))^2.$$

Ainsi on remarque que

$$\begin{aligned} \bar{\Delta} f(n) &= \frac{1}{\tau(n)} \sum_{d|n} \{f(d)^2 + \bar{f}(n)^2 - 2\bar{f}(n)f(d)\} \\ &= \frac{1}{\tau(n)} \sum_{d|n} f(d)^2 + \bar{f}(n)^2 - 2 \frac{\bar{f}(n)}{\tau(n)} \sum_{d|n} f(d) \\ &= \frac{1}{\tau(n)} \sum_{d|n} f(d)^2 - \bar{f}(n)^2 \end{aligned}$$

et donc que

$$(4.1) \quad \bar{\Delta} f(n) = \frac{1}{\tau(n)} \sum_{d|n} f(d)^2 - \bar{f}(n)^2 = \overline{f^2}(n) - \bar{f}(n)^2,$$

$$(4.2) \quad \hat{\Delta} f(n) = \frac{1}{2^{\omega(n)}} \sum_{d|n} \mu^2(d) f(d)^2 - \hat{f}(n)^2 = \hat{f}^2(n) - \hat{f}(n)^2,$$

$$(4.3) \quad \tilde{\Delta} f(n) = \frac{1}{2^{\omega(n)}} \sum_{\substack{d|n \\ (d, n/d) = 1}} f(d)^2 - \tilde{f}(n)^2 = \tilde{f}^2(n) - \tilde{f}(n)^2.$$

donnent lieu à trois familles A , B et E de sous-ensembles de D_n pour lesquels les fonctions τ_A , τ_B et τ_E sont multiplicatives et jamais nulles.

Étant donné une fonction arithmétique f et une famille A , on pose maintenant

$$f_A(n) = \frac{1}{\tau_A(n)} \sum_{\substack{d|n \\ d \in A_n}} f(d),$$

ce qui revient à écrire

$$(5.1) \quad f_A := \frac{f *_A 1}{1 *_A 1}.$$

Aux cas particuliers $*_A = *$, $*_A = *_l$ (où $*_l$ est la restriction de $*$ aux diviseurs libres de carrés) et $*_A = *_u$, correspondent bien sûr les fonctions \bar{f} , \hat{f} et \tilde{f} .

On a mentionné à la section 2 qu'en général $\bar{f}(n) \neq f(n)$. Il en est de même pour sa généralisation f_A en ce sens que l'on peut facilement démontrer que

$f_A(n) = f(n)$ pour tout $n \geq 1 \Leftrightarrow f \equiv c$ pour une certaine constante c ; auquel cas, si f est multiplicative on a $c = 1$, alors que si f est additive, on a $c = 0$.

Le prochain résultat généralise le théorème 2.2.

THÉORÈME 5.1. Soit $f \in \mathbf{F}$ et A une famille d'ensembles $A_n \subset D_n$ et supposons que $\tau_A \in \mathcal{M}$. Alors la fonction f_A est multiplicative si $f \in \mathcal{M}$ et elle est additive si $f \in \mathcal{A}$.

REMARQUES. Il est également possible de considérer les familles d'ensembles A_n pour lesquelles $\tau_A(n)$ peut être nulle pour certains entiers n ; pour ce faire, il suffit de remplacer (5.1) par

$$(5.2) \quad f_A(n) = \begin{cases} \frac{f *_A 1}{1 *_A 1}(n) & \text{si } (1 *_A 1)(n) \neq 0, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Dans ce cas, seule la première partie du théorème 5.1 reste valide i.e. si $f \in \mathcal{M}$ alors la fonction f_A définie par l'égalité (5.2) est multiplicative. En effet, soit $(m, n) = 1$ et supposons que $f \in \mathcal{M}$. Si $\tau_A(n) \neq 0$ et $\tau_A(m) \neq 0$ alors $f_A(mn) = f_A(m)f_A(n)$; si par contre $\tau_A(n)$ ou $\tau_A(m)$ est nulle alors,

puisque $\tau_A \in \mathcal{M}$, $\tau_A(mn) = 0$, i.e. $f_A(mn) = 0 = f_A(m)f_A(n)$ car au moins une des quantités $f_A(m)$ et $f_A(n)$ est nulle. Donc si $f \in \mathcal{M}$ alors $f_A \in \mathcal{M}$.

Pour montrer que la fonction f_A de la relation (5.2) ne préserve pas l'additivité sur certains ensembles de diviseurs, il suffit de considérer $A_n = \{d : d|n, (d, 2) = 1 \text{ et } (n/d, 2) = 1\}$ et $f \in \mathcal{A}$ avec $f(n) > 0$ pour chaque $n > 1$. On a alors $\tau_A(3) = 2$, $\tau_A(4) = 0$ et $\tau_A(12) = 0$. Il est clair que $f_A(12) = f_A(4) = 0$ alors que $f_A(3) = \frac{1}{2}f(3) > 0$. Ainsi $f_A(12) \neq f_A(4) + f_A(3)$.

La définition de la fonction f_A à partir de la restriction du produit de Dirichlet à certains diviseurs est basée sur la notion de A -convolution introduite par Narkiewicz [6] (voir également Subbarao [8] et le chapitre 4 du livre de McCarthy [5]). Soit h et $g \in \mathbf{F}$ alors pour une famille A de sous-ensembles A_n de D_n , on définit la A -convolution de h et g par

$$(h *_A g)(n) := \sum_{\substack{d|n \\ d \in A_n}} h(d)g(n/d),$$

qui de façon générale n'est pas commutative. C'est-à-dire qu'il arrive qu'on ait, pour une certaine famille d'ensembles $A_n \subset D_n$,

$$\sum_{\substack{d|n \\ d \in A_n}} h(d)g(n/d) \neq \sum_{\substack{d|n \\ d \in A_n}} h(n/d)g(d).$$

EXEMPLES. On a ainsi les cas particuliers suivants:

(i) Soit $*_A = *$ alors $f_A(n) = \bar{f}(n) = \frac{1}{\tau(n)} \sum_{d|n} f(d)$.

(ii) Soit $*_A = *_l$ alors $f_A(n) = \hat{f}(n) = \frac{1}{2^{\omega(n)}} \sum_{d|n} \mu^2(d)f(d)$.

(iii) Soit $*_A = *_u$ alors $f_A(n) = \tilde{f}(n) = \frac{1}{2^{\omega(n)}} \sum_{\substack{d|n \\ (d, n/d) = 1}} f(d)$.

(iv) Soit $(a, b)^*$ le plus grand commun diviseur unitaire de a et b et

$$\tau_A(n) = \sum_{\substack{d|n \\ (d, n/d)^* = 1}} 1 = \tau(n) \prod_{\substack{p^\alpha || n \\ \alpha \text{ pair}}} \frac{\alpha}{1 + \alpha}, \text{ alors}$$

$$f_A(n) = \frac{1}{\tau_A(n)} \sum_{\substack{d|n \\ (d, n/d)^* = 1}} f(d).$$

(v) On pose $\omega_k(n) := \sum_{\substack{p|n \\ (p,k)=1}} 1$. Soit $\tau_A(n) = \sum_{\substack{d|n; (d,k)=1 \\ (d,n/d)=1}} 1 = 2^{\omega_k(n)}$ alors

$$f_A(n) = \frac{1}{2^{\omega_k(n)}} \sum_{\substack{d|n; (d,k)=1 \\ (d,n/d)=1}} f(d).$$

(vi) Soit y un nombre réel fixe ($y \geq 2$) et $\tau_A(n) = \sum_{\substack{d|n \\ P(d) \leq y}} \mu^2(d)$, alors

$$f_A(n) = \frac{1}{\tau_A(n)} \sum_{\substack{d|n \\ P(d) \leq y}} \mu^2(d) f(d). \text{ Soit } f \in \mathcal{A} \text{ alors } f_A(n) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{p|n \\ p \leq y}} f(p).$$

En particulier, si $P(n) \leq y$ alors $f_A(n) = \hat{f}(n)$ et $f_A(n) = 0$ si $p(n) > y$, où $p(n)$ désigne le plus petit facteur premier de n , avec la convention $p(1) = 1$.

(vii) Soit $\tau_A(n) = \prod_{\substack{p^\alpha || n \\ p > 2}} (\alpha + 1)$ avec $\tau_A(2) = \tau_A(1) = 1$, alors

$$f_A(n) = \frac{1}{\tau_A(n)} \sum_{\substack{d|n \\ d \text{ impair}}} f(d). \text{ En particulier, si } n \text{ est impair alors}$$

$$f_A(n) = \bar{f}(n). \text{ Soit } f \in \mathcal{A}, \text{ alors } f_A(n) = 0 \text{ si } n = 2^m \text{ et}$$

$$f_A(n) = \sum_{\substack{p^\alpha || n \\ p \neq 2}} \frac{1}{\alpha + 1} \sum_{m=1}^{\alpha} f(p^m) \text{ si } n \text{ n'est pas une puissance de } 2.$$

(viii) Soit $\tau_A(n) = \sum_{\substack{d^k | n \\ (d^k, n/d^k) = 1}} 1 = 2^{\#\{p: p^\alpha || n \text{ avec } \alpha \equiv 0 \pmod k\}}$, alors

$$f_A(n) = \frac{1}{\tau_A(n)} \sum_{\substack{d^k | n \\ (d^k, n/(d^k)) = 1}} f(d).$$

(ix) Soit $y \geq 2$ fixe et $\tau_A(n) = \sum_{\substack{d|n \\ P(d) \leq y}} 1$, alors $f_A(n) = \frac{1}{\tau_A(n)} \sum_{\substack{d|n \\ P(d) \leq y}} f(d)$.

Soit $f \in \mathcal{A}$, alors $\bar{f}(n) = f_A(n) + \sum_{\substack{p^\alpha || n \\ p > y}} \frac{1}{\alpha + 1} \sum_{m=1}^{\alpha} f(p^m)$. En particulier $f_A(n) = \bar{f}(n)$ si $P(n) \leq y$ et $f_A(n) = 0$ si $p(n) > y$.

(x) La relation (5.2) est valable avec

$$\tau_A(n) = \begin{cases} \prod_{i=1}^r (\alpha_i + 1) & \text{si } n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r} \prod_{i>r} q_i^{\beta_i}, (p_i, kl) = 1 \text{ et } q_i \nmid (k, l), \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

On peut même démontrer un résultat d'un caractère un peu plus général que le théorème 5.1 en considérant une fonction arithmétique multiplicative g qui n'a aucun lien avec un ensemble de diviseurs. C'est ainsi qu'on a le résultat suivant, dont le théorème 2.2 devient un cas particulier.

THÉORÈME 5.2. *Soit A une famille d'ensembles $A_n \subset D_n$ telle que la convolution $*_A$ est commutative. Supposons de plus que $\tau_A \in \mathcal{M}$. On considère U et g deux fonctions arithmétiques multiplicatives telles que $(U*_A g)(n) \neq 0$ pour chaque entier $n \geq 1$. Enfin, soit $f \in \mathbf{F}$, alors $\check{f}_A = \check{f}_A(g, U) := \frac{Uf*_A g}{U*_A g}$ est multiplicative si f est multiplicative, et additive si f est additive.*

Démonstration. On sait que le produit de Dirichlet de deux fonctions multiplicatives est multiplicatif (voir Apostol [1], p. 35). Cette propriété est également vraie pour le produit $*_A$ tel que défini ici. En effet, il est facile de démontrer que si f et g sont multiplicatives, alors $f*_A g$ est aussi multiplicative. Ainsi la première affirmation du théorème est vraie.

Pour démontrer le cas additif, on procède comme suit. Soit $f \in \mathcal{A}$, alors pour $(m, n) = 1$,

$$\begin{aligned} \check{f}_A(mn) &= \frac{(Uf*_A g)(m)(U*_A g)(n)}{(U*_A g)(mn)} + \frac{(Uf*_A g)(n)(U*_A g)(m)}{(U*_A g)(mn)} \\ &= \frac{(Uf*_A g)(m)}{(U*_A g)(m)} + \frac{(Uf*_A g)(n)}{(U*_A g)(n)} = \check{f}_A(m) + \check{f}_A(n), \end{aligned}$$

d'où l'additivité de \check{f} .

REMARQUES

1) Pour déduire le théorème 2.2 du théorème 5.2, il suffit de poser $*_A = *$, $g \equiv 1$ et de substituer pour U les fonctions 1 et μ^2 , et cela afin d'obtenir successivement $\check{f}_A = \bar{f}$ et $\check{f}_A = \hat{f}$. Pour obtenir $\check{f}_A = \tilde{f}$, en plus de poser $g = U \equiv 1$, il faut considérer la convolution unitaire $*_u$.

2) Nous avons vu que \hat{f} ne satisfait pas la réciproque du théorème 2.2. De même la réciproque du théorème 5.2 n'est pas vraie: il suffit de choisir $*_A = *$, $U(n) = \mu^2(n)$ et $g(n) = 1(n)$ pour obtenir $\check{f}_A = \hat{f}$.

COROLLAIRE 5.3. *Etant donné $f \in \mathbf{F}$, il existe une fonction $h = h(f)$ telle que f est liée à la fonction ϕ d'Euler par la relation*

$$(5.3) \quad f(n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} h(d) \phi(d).$$

En particulier $f \in \mathcal{A}$ (respectivement $f \in \mathcal{M}$) si et seulement si $h \in \mathcal{A}$ (respectivement $h \in \mathcal{M}$).

Démonstration. On pose $*_A = *$, $U(n) = n$ et $g(n) = \mu(n)$ dans le théorème 5.2 et on obtient ainsi la fonction

$$(5.4) \quad \check{f}(n) = \frac{1}{\phi(n)} \sum_{d|n} df(d)\mu(n/d).$$

La fonction h cherchée est alors $h = \check{f}$, car (5.4) implique $h(n)\phi(n) = \sum_{d|n} df(d)\mu(n/d)$, de sorte que, par l'inversion de Moebius, on en déduit (5.3).

Avant d'énoncer le prochain corollaire, nous allons introduire la notion de nombre k -parfait. Soit k un entier ($k \geq 2$). On dit d'un entier n qu'il est k -parfait s'il existe m tel que $n = m^k$; en d'autres mots si les exposants des facteurs premiers (distincts) de n , dans sa décomposition canonique, sont des multiples de k , i.e.

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r} \text{ avec } \alpha_i \equiv 0 \pmod{k} \text{ pour } i = 1, 2, \dots, r.$$

COROLLAIRE 5.4. *Etant donné un nombre réel r , il existe une fonction arithmétique $g_r \in \mathcal{FM}$ définie en (5.5) telle que $n^r = \sum_{d|n} d^{r-1} \phi(d) g_r(d)$, pour tout nombre naturel n . En particulier un entier positif n est k -parfait si et seulement si il existe m tel que $n = \sum_{d|m} d^{k-1} \phi(d) g_k(d)$. Pour des valeurs entières de k , la fonction $n^{k-1} \phi(n) g_k(n)$ est tout simplement la fonction indicatrice $J_k(n)$ de Jordan définie par $J_k(n) := n^k \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p^k}\right)$, soit une généralisation de la fonction ϕ d'Euler.*

Démonstration. Soit r un nombre réel. On pose $f(n) = n^{r-1}$ dans le corollaire 5.3. On a ainsi $n^r = \sum_{d|n} h(d)\phi(d)$ avec $h(n) = \frac{1}{\phi(n)} \sum_{d|n} d^r \mu(n/d)$.

En posant

$$(5.5) \quad g_r(n) := \prod_{p|n} \left(1 + \frac{1 - p^{1-r}}{p - 1}\right) \text{ avec } g_0(n) = E(n),$$

il vient

$$h(n) = \frac{1}{\phi(n)} \sum_{d|n} d^r \mu(n/d) = \prod_{p^a || n} p^{(r-1)a} \left(1 + \frac{1 - p^{1-r}}{p - 1}\right) = n^{r-1} g_r(n).$$

Ceci permet de déduire l'identité $n^r = \sum_{d|n} d^{r-1} \phi(d) g_r(d)$.

EXEMPLES. De ce dernier corollaire, on obtient facilement les identités suivantes:

$$\sqrt{n} = \sum_{d|n} \frac{\phi(d)}{\sqrt{d}} \prod_{p|d} (1 + p^{-1/2})^{-1},$$

$$10^r = \sum_{d|10} d^{r-1} \phi(d) g_r(d),$$

$$\frac{1}{n} = \sum_{d|n} \frac{(-1)^{\omega(d)} \delta(d)}{d^2} \phi(d),$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sum_{d|2} \frac{\phi(d)}{d^{3/2}} \prod_{p|d} (2 - p^{3/2}),$$

$$n^2 = \sum_{d|n} \phi(d) \sum_{c|d} c \mu^2(d/c).$$

Comme on l'a mentionné dans la seconde remarque qui suit le théorème 5.2, la réciproque de ce théorème n'est pas toujours vraie. C'est dans ce contexte qu'il est intéressant de mentionner qu'on a quand même le résultat suivant.

THÉORÈME 5.5. *Soit $*_A$ une A -convolution commutative telle que $\tau_A \in \mathcal{M}$ et $n \in A_n$ pour chaque $n \geq 1$. Soit $U \in \mathcal{M}$ et $g \in \mathcal{M}$ tels que $U(n) \neq 0$ et $(U *_A g)(n) \neq 0$ pour chaque entier $n \geq 1$. Pour $f \in \mathbf{F}$ on pose $\check{f}_A = \frac{Uf *_A g}{U *_A g}$. Alors f est additive si \check{f}_A est additive, et multiplicative si \check{f}_A est multiplicative.*

Démonstration. Soit $f \in \mathbf{F}$ tel que $\check{f}_A \in \mathcal{A}$. On a $U(1) = g(1) = (U *_A g)(1) = 1$ d'où $(Uf *_A g)(1) = \check{f}(1)$ i.e. $f(1) = \check{f}(1)$. Il faut maintenant montrer que pour tout couple (m, n) d'entiers positifs relativement premiers, on a $f(mn) = f(m) + f(n)$. Supposons qu'il existe de tels couples pour lesquels la relation d'additivité pour f ne tient pas. Soit m_0 le plus petit élément de \mathbf{N} pour lequel il existe au moins un entier positif n (premier avec m_0) tel que $f(m_0 n) \neq f(m_0) + f(n)$. D'autre part soit n_0 le plus petit parmi tous ces entiers n . Il est alors clair que:

$$1 < m_0 < n_0 \text{ avec } (m_0, n_0) = 1, \quad f(m_0 n_0) \neq f(m_0) + f(n_0)$$

$$f(ln) = f(l) + f(n) \text{ pour tout } n \text{ et } l (1 \leq l < m_0), (l, n) = 1$$

$$f(m_0 r) = f(m_0) + f(r) \text{ pour tout } r, 1 \leq r < n_0 \text{ et } (m_0, r) = 1.$$

D'autre part, puisque tout diviseur de $m_0 n_0$ est le produit de deux entiers relativement premiers, l'un divisant m_0 et l'autre divisant n_0 , et qu'en plus $\check{f}_A \in \mathcal{A}$ (avec $(U *_A g)(n) \neq 0, \forall n \geq 1$), il suit que

$$(Uf *_A g)(m_0 n_0) = (Uf *_A g)(m_0)(U *_A g)(n_0) \\ + (Uf *_A g)(n_0)(U *_A g)(m_0),$$

soit l'égalité

$$\sum_{\substack{d_1 | n_0, d_1 \in An_0 \\ d_2 | m_0, d_2 \in Am_0}} U(d_1 d_2) f(d_1 d_2) g\left(\frac{m_0 n_0}{d_1 d_2}\right) \\ = \sum_{\substack{d_1 | n_0, d_1 \in An_0 \\ d_2 | m_0, d_2 \in Am_0}} U(d_1) U(d_2) (f(d_1) + f(d_2)) g\left(\frac{m_0 n_0}{d_1 d_2}\right),$$

qui peut également s'écrire

$$\sum_{\substack{d_1 | n_0, d_1 \in An_0 \\ d_2 | m_0, d_2 \in Am_0}} U(d_1 d_2) (f(d_1 d_2) - f(d_1) - f(d_2)) g\left(\frac{m_0 n_0}{d_1 d_2}\right) = 0.$$

Mais tous les termes de cette somme sont nuls sauf lorsque $d_1 = n_0$ et $d_2 = m_0$. Il suit que $U(m_0 n_0) (f(m_0 n_0) - f(n_0) - f(m_0)) = 0$, i.e. $f(m_0 n_0) = f(m_0) + f(n_0)$, ce qui contredit le choix minimal de m_0 . D'où l'additivité de f . La démonstration du cas où $f \in \mathcal{M}$ se fait de manière analogue.

REMARQUE. Pour déduire la réciproque du théorème 2.2 dans le cas de \check{f} et celui de \check{f} , en utilisant le théorème 5.5, il faut poser $U = g \equiv 1$: on obtient alors successivement $\check{f}_A = \check{f}$ en substituant $*$ à $*_A$ et $\check{f}_A = \check{f}$, en substituant $*_u$ à $*_A$.

RÉFÉRENCES

- [1] APOSTOL, T.M. *Introduction to Analytic Number Theory*. Springer-Verlag (New York), 1976.
- [2] BINGHAM, N.H., C.M. GOLDIE and J.L. TEUGELS. *Regular Variation*. Encyclopedia of mathematics and its applications (27), Cambridge University Press, 1989.

- [3] DE KONINCK, J.M. et A. MERCIER. Les fonctions arithmétiques et le plus grand facteur premier. *Acta Arith.* 52 (1989), 25-48.
- [4] DUNCAN, R.L. Note on the divisors of a number. *Amer. Math. Monthly* 68 (1961), 356-359.
- [5] MCCARTHY, P.J. *Introduction to Arithmetical Functions*. Springer-Verlag (New York), 1986.
- [6] NARKIEWICZ, W. On a class of arithmetical convolutions. *Colloq. Math.* 10 (1963), 81-94.
- [7] SENETA, E. *Regularly varying functions*. Lecture Notes in Mathematics 508, Springer Verlag, 1976.
- [8] SUBBARAO, M.V. On some arithmetic convolutions. Lecture Notes in Mathematics 251, 247-271, Springer-Verlag, 1972.

(Reçu le 17 novembre 1994; version révisée reçue le 20 juillet 1995.)

Jean-Marie De Koninck
Jacques Grah

Département de mathématiques et de statistique
Université Laval
Québec G1K 7P4
Canada