Acta Math. Hung.
56 (3—4) (1990), 211—224.

FONCTIONS ARITHMÉTIQUES TRONQUÉES

J. M. DE KONINCK (Québec) et A. MERCIER (Chicoutimi)

1. Introduction

Soit $m \geqq 0$ un entier. Pour $n \geqq 1$ un entier, on dénote par $\omega(n)$ la fonction arithmétique qui désigne le nombre de nombres premiers distincts qui divisent n et par $\mu(n)$ la fonction de Möbius. Pour obtenir une approche générale de la méthode du crible combinatoire [3], on doit, par exemple, utiliser l'identité

$$\sum_{\substack{d|n \\ \omega(d) \leqq m}} \mu(d) = (-1)^m \binom{\omega(n)-1}{m}.$$

D'une façon générale toutefois, il n'est pas facile de trouver une formule fermée pour les sommes $\sum_{\substack{d|n \\ \omega(d) \leqq m}} g(d)$, où $g(n)$ est une fonction arithmétique arbitraire. Par exemple, pour $g(n)=1$, on a pour $n=p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$

$$\sum_{\substack{d|n \\ \omega(d) \leqq m}} 1 = 1 + \sum_{1 \leqq i \leqq k} \alpha_i + \sum_{1 \leqq i < j \leqq k} \alpha_i \alpha_j + \sum_{1 \leqq i < j < r \leqq k} \alpha_i \alpha_j \alpha_r + \dots$$
$$\dots + \sum_{1 \leqq i_1 < \dots < i_m \leqq k} \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_m}.$$

En posant $\prod_{i=1}^{k} (1+\alpha_i t) = 1 + \sum_{i=1}^{k} a_i(\alpha_1, \dots, \alpha_k) t^i$ et en définissant le polynôme $q_m(\alpha_1, \dots, \alpha_k; t)$ de degré m $(m \leqq k)$ par

$$q_m(\alpha_1, \dots, \alpha_k;\ t) = 1 + \sum_{i=1}^{m} a_i(\alpha_1, \dots, \alpha_k) t^i,$$

on obtient

$$\sum_{\substack{d|n \\ \omega(d) \leqq m}} 1 = q_m(\alpha_1, \dots, \alpha_k;\ 1).$$

Dans le cas où n est libre de carrés, cette dernière identité devient

$$\sum_{\substack{d|n \\ \omega(d) \leqq m}} 1 = q_m(1, 1, \dots, 1;\ 1) = \binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \dots + \binom{k}{m} =$$
$$= 2^m + \sum_{j=1}^{m} 2^{j-1} \binom{k-j}{m+1-j},$$

d'après ([5, p. 130]). Ceci nous amène à poser

$$(1)\qquad g_m(n) = \sum_{\substack{d|n \\ \omega(d)\leqq m}} g(n/d)$$

où $g(n)$ est une fonction arithmétique connue. Les résultats que nous obtiendrons concernant $g_m(n)$ vont nous permettre de généraliser quelques résultats d'Alladi [1] lesquels sont utiles pour obtenir des informations sur le plus petit et le plus grand facteur premier de n. De plus, quelques généralisations de certains théorèmes de la théorie élémentaire des nombres seront obtenues.

2. Quelques lemmes

LEMME 1. *Soit m, r et k des entiers non-négatifs satisfaisant à $r\geqq k+m$. Alors on a*

$$\sum_{m+1\leqq i_1<i_2<\dots<i_k\leqq r} 1 = \binom{r-m}{k}.$$

DÉMONSTRATION. Puisque le nombre de «$r-m$» objets pris k à la fois est $\binom{r-m}{k}$, le résultat est immédiat.

LEMME 2. *Etant donnés m, r et k des entiers non-négatifs satisfaisant à $r\geqq k+m$, et soit (a_i) une suite d'entiers telle que $a_i\geqq 2$ pour chaque i. Alors*

$$\sum_{m+1\leqq i_1<i_2<\dots<i_k\leqq r} a_{i_k} = \sum_{j=k+m}^{r} \binom{j-m-1}{k-1} a_j.$$

DÉMONSTRATION. On utilise un raisonnement par induction sur k. Pour $k=1$, le résultat est trivial. Pour $k+1$, on a

$$(2)\qquad \sum_{m+1\leqq i_1<\dots<i_{k+1}\leqq r} a_{i_{k+1}} = \sum_{m+1\leqq i_1\leqq r-k} \Bigg(\sum_{i_1+1\leqq i_2<\dots<i_{k+1}\leqq r} a_{i_{k+1}}\Bigg)$$

et en utilisant l'hypothèse d'induction, la somme de droite peut s'écrire sous la forme

$$\sum_{m+1\leqq i_1\leqq r-k} \Bigg(\sum_{j=k+i_1}^{r} \binom{j-i_1-1}{k-1} a_j\Bigg).$$

Ainsi (2) devient

$$(3)\qquad \sum_{m+1\leqq i_1<\dots<i_{k+1}\leqq r} a_{i_{k+1}} = \sum_{j=k+m+1}^{r} \binom{j-m-2}{k-1} a_j + \sum_{j=k+m+2}^{r} \binom{j-m-3}{k-1} a_j + \dots$$
$$\dots + \sum_{j=r}^{r} \binom{j-r+k-1}{k-1} a_j.$$

Soit $0\leqq n\leqq r-k-m-1$, alors le coefficient qui multiplie $a_{k+n+m+1}$ est égal à

$$\sum_{j=1}^{n+1} \binom{k+n-j}{k-1} = \binom{k+n}{k}.$$

Dans ce cas, (3) devient

$$\sum_{m+1\le i_1<\dots<i_{k+1}\le r} a_{i_{k+1}} = \sum_{n=0}^{r-k-m-1} \binom{k+n}{k} a_{k+n+m+1} = \sum_{j=k+m+1}^{r} \binom{j-m-1}{k} a_j,$$

ce qui démontre le résultat.

LEMME 3. *Soit k et r des entiers positifs tels que $r>k$. Alors pour chaque entier $s\in[1,k]$, on a*

$$\sum_{1\le i_1<\dots<i_s<\dots<i_k\le r} a_{i_s} = \sum_{j=s}^{r-k+s} \binom{j-1}{s-1}\binom{r-j}{k-s} a_j.$$

DÉMONSTRATION. D'après le lemme 1, on peut écrire

$$\sum_{1\le i_1<\dots<i_s<\dots<i_k\le r} a_{i_s} = \sum_{1\le i_1<\dots<i_s\le r+s-k} \binom{r-i_s}{k-s} a_{i_s}$$

et en utilisant le lemme 2, on obtient le résultat.

LEMME 4. *Soit n et m des entiers non-négatifs. Alors pour tout entier positif k, on a*

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j}\binom{k+j}{m} = (-1)^n \binom{k}{m-n}.$$

DÉMONSTRATION. Puisque

$$\sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \binom{n+1}{j}\binom{k+j}{m} = \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \left\{\binom{n}{j}+\binom{n}{j-1}\right\}\binom{k+j}{m} =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j}\binom{k+j}{m} - \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j}\binom{k+j+1}{m}$$

alors en utilisant cette égalité ainsi que l'induction sur n, on obtient le résultat.

3. Séries de Dirichlet

Si dans (1), on remplace $g(n)$ par $\mu(n)$ alors il s'ensuit que

$$\mu_m(n) = \sum_{\substack{d|n\\ \omega(d)\le m}} \mu(n/d). \tag{4}$$

Il est immédiat que pour $m\ge\omega(n)$, (4) devient $\mu_m(n)=\sum_{d|n}\mu(d)$, tandis que si $m=0$, $\mu_0(n)=\mu(n)$. Cependant, l'équation (4) peut s'écrire sous la forme

$$\mu_m(n) = \sum_{d|n} \mu(n/d)\beta(d)$$

qui est équivalent à

$$\sum_{d|n} \mu_m(d) = \beta(n) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \omega(n)\le m \\ 0 & \text{si} \quad \omega(n)>m. \end{cases} \tag{5}$$

REMARQUE. Lorsque $m=0$, (5) se réduit à un résultat connu:

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = 1 \\ 0 & \text{si} \quad n > 1. \end{cases}$$

Soit α_0 l'abscisse de convergence absolue des séries de Dirichlet, alors pour $\operatorname{Re} s > \alpha_0$ on a

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_m(n)}{n^s}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sum_{d|n} \mu_m(d)}{n^s}\right) = \sum_{\substack{n=1 \\ \omega(n) \leqq m}}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

On définit maintenant formellement $\zeta_m(s)$ comme étant la série $\sum_{\substack{n=1 \\ \omega(n) \leqq m}}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, ce qui nous permet d'écrire

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_m(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} \cdot \zeta_m(s). \tag{6}$$

Il est facile de voir que $\zeta_0(s)=1$ et que $\lim_{m \to \infty} \zeta_m(s) = \zeta(s)$ où $\zeta(s)$ désigne la fonction zeta de Riemann. Généralisons l'identité obtenue en (6).

THEORÈME 1. *Pour* $\operatorname{Re} s > \alpha_0$, *on a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_m(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s} \cdot \zeta_m(s),$$

où

$$g_m(n) = \sum_{\substack{d|n \\ \omega(d) \leqq m}} g(n/d).$$

DÉMONSTRATION. Ceci est immédiat d'après l'identité $g_m(n) = (g * \beta)(n)$, où $*$ désigne le produit de Dirichlet et $\beta(n)$ la fonction définie en (5).

COROLLAIRE. *Pour* $\operatorname{Re} s > 1$, *on a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_m(n)}{n^s} = \zeta^2(s) \zeta_m(s),$$

où $d_m(n) = \sum_{\substack{d|n \\ \omega(d) \leqq m}} d(n/d)$ et $d(n) = \sum_{d|n} 1$.

COROLLAIRE. *Soit f et g des fonctions arithmétiques arbitraires et soit* $h(n) = \sum_{d|n} g(d) f(n/d)$. *Alors pour* $\operatorname{Re} s > \alpha_0$, *on a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sum_{d|n} g_m(d) f(n/d)}{n^s}\right) = \zeta_m(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s}$$

où $g_m(n) = \sum_{\substack{d|n \\ \omega(d) \leqq m}} g(n/d)$.

DÉMONSTRATION. En utilisant le théorème 1, on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sum_{d|n} g_m(d)f(n/d)}{n^s}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{g_m(n)}{n^s}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s} = \zeta_m(s)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g(n)}{n^s}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s},$$

ce qui démontre le résultat.

4. La fonction $\mu_m(n)$

THÉORÈME 2. *Soit* $n\geqq 1$ *un entier. Alors pour tout entier* $m\geqq 0$, *on a*

$$\mu_m(n) = (-1)^m\binom{\omega(n)-1}{m}\mu(n).$$

DÉMONSTRATION. D'après (5), il suffit de montrer que

$$\sum_{d|n}(-1)^m\binom{\omega(d)-1}{m}\mu(d) = \begin{cases}1 & \text{si} \quad \omega(n)\leqq m\\ 0 & \text{si} \quad \omega(n)>m.\end{cases}$$

Puisque $\binom{-1}{m}=(-1)^m$, alors pour $n=1$ on a le résultat. Soit $n>1$ et supposons que $1\leqq\omega(n)\leqq m$. Si $1<d|n$, alors $\binom{\omega(d)-1}{m}=0$ et ainsi $\sum_{\substack{d|n\\ d>1}}(-1)^m\binom{\omega(d)-1}{m}\mu(d)=$ $=0$. Cela prouve le résultat pour $0\leqq\omega(n)\leqq m$. Supposons maintenant que $\omega(n)>m$. En posant $n=p_1^{\alpha_1}\dots p_k^{\alpha_k}$, $k\geqq m+1$, alors pour $1<d|n$, il suffit de considérer les diviseurs «d» ayant la forme $d=p_1\dots p_j$, $m+1\leqq j\leqq k$. Ainsi, on peut écrire

$$\sum_{\substack{d|n\\ d>1}}(-1)^m\binom{\omega(d)-1}{m}\mu(d) =$$

$$= -\sum_{1\leqq i_1<\dots<i_{m+1}\leqq k} 1+\binom{m+1}{m}\sum_{1\leqq i_1<\dots<i_{m+2}\leqq k} 1+\dots+(-1)^k\binom{k-1}{m}$$

et d'après le lemme 1, on obtient

$$\sum_{\substack{d|n\\ d>1}}(-1)^m\binom{\omega(d)-1}{m}\mu(d) = -\left\{\binom{k}{m+1}-\binom{m+1}{m}\binom{k}{m+2}+\dots+(-1)^{k-1}\binom{k-1}{m}\right\} =$$

$$= \frac{-k!}{m!(k-m-1)!}\sum_{i=0}^{k-m-1}\frac{(-1)^i\binom{k-m-1}{i}}{m+1+i}.$$

Mais en utilisant les fractions partielles, il est facile de montrer que

$$\sum_{i=0}^{k-m-1}\frac{(-1)^i\binom{k-m-1}{i}}{m+1+i} = \frac{(k-m-1)!}{(m+1)(m+2)\dots k},$$

et ainsi on obtient le résultat pour $\omega(n)>m$. Ceci achève la démonstration du théorème 2.

THÉORÈME 3. *Pour chaque couple d'entiers* $r \geqq 0$, $m \geqq 0$ *on a*

$$\sum_{\substack{d|n \\ \omega(d) \leqq r}} \mu_m(d) = (-1)^m \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \binom{j-1}{m} \binom{\omega(n)}{j}.$$

DÉMONSTRATION. Puisque

$$\sum_{\substack{d|n \\ \omega(d) = r}} \mu_m(d) = (-1)^{m+r} \binom{r-1}{m} \sum_{1 \leqq i_1 < \ldots < i_r \leqq k} 1,$$

où $k = \omega(n)$, alors d'après le lemme 1 on obtient

$$\sum_{\substack{d|n \\ \omega(d) = r}} \mu_m(d) = (-1)^{m+r} \binom{r-1}{m} \binom{\omega(n)}{r}$$

et ceci démontre le résultat.

REMARQUES. 1) Lorsque $m=0$, on obtient l'identité déjà mentionnée dans l'introduction, à savoir

$$\sum_{\substack{d|n \\ \omega(d) \leqq r}} \mu(d) = (-1)^r \binom{\omega(n)-1}{r}.$$

2) En utilisant l'identité $\binom{\omega(n)}{j} = \binom{\omega(n)-1}{j} + \binom{\omega(n)-1}{j-1}$, l'expression du théorème précédent devient

$$\sum_{\substack{d|n \\ \omega(d) \leqq r}} \mu_m(d) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad r \leqq m \\ (-1)^{m+r} r \binom{r-1}{m} \displaystyle\sum_{j=1}^{k-m-1} \frac{\binom{m+j}{r}}{j} & \text{si} \quad r > m. \end{cases}$$

D'après le corollaire 2, on peut écrire

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sum_{d|n} g_m(d) f(n/d)}{n^s} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sum_{\substack{d|n \\ \omega(d) \leqq m}} h(n/d)}{n^s} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_m(n)}{n^s}, \tag{7}$$

et ceci nous permet d'énoncer le résultat suivant.

THÉORÈME 4. *Soit* $n \geqq 1$ *et soit* f *une fonction airthmétique arbitraire. Alors pour tout entier* $m \geqq 0$, *on a*

$$\sum_{d|n} \mu_m(d) f(n/d) = \sum_{\substack{d|n \\ \omega(d) \leqq m}} g(n/d)$$

où $g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f(n/d)$.

THÉORÈME 5 (Inversion de Möbius). *Soit* $n \geqq 1$ *et soit* f *et* g *deux fonctions arithmétiques arbitraires. Alors pour tout entier* $m \geqq 0$, *on a*

$$\sum_{d|n} \mu_m(d) f(n/d) = g_m(n) \Leftrightarrow f_m(n) = \sum_{d|n} g_m(d),$$

où

$$f_m(n) = \sum_{\substack{d|n \\ \omega(d) \leqq m}} f(n/d) \quad et \quad g_m(n) = \sum_{\substack{d|n \\ \omega(d) \leqq m}} g(n/d).$$

DÉMONSTRATION. Soit $l(n)$ et $\beta(n)$ deux fonctions arithmétiques définies par $l(n)=1$, pour tout $n \geqq 1$ et $\beta(n)=\begin{cases} 1 \text{ si } \omega(n) \leqq m \\ 0 \text{ si } \omega(n) > m \end{cases}$. Alors on a $(\mu_m * f)(n) = g_m(n)$ ou encore

$$\big((1 * \mu_m) * f\big)(n) = (1 * g_m)(n).$$

En utilisant (5), cette dernière identité est équivalente à

$$(\beta * f)(n) = (1 * g_m)(n)$$

ou encore

$$\sum_{\substack{d|n \\ \omega(d) \leqq m}} f(n/d) = \sum_{d|n} g_m(d)$$

ce qui donne le résultat.

5. Identités contenant la fonction $\mu_m(n)$

L'objet de cette section est centré sur l'étude des sommes de la forme $\sum_{d|n} \mu_m(d) f(d)$ dans le cas où f est une fonction arithmétique choisie. Si $0 \leqq \omega(n) \leqq m$, il est immédiat que $\sum_{d|n} \mu_m(d) f(d) = f(l)$. Supposons maintenant que $\omega(n) > m$. En posant $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, $k \geqq m+1$, alors pour $d|n$, $d>1$, il suffit de considérer les diviseurs «d» ayant la forme $d = p_1 \dots p_j$, $m+1 \leqq j \leqq k$. Donc

$$\sum_{\substack{d|n \\ d>1}} \mu_m(d) f(d) = -\sum_{1 \leqq i_1 < \dots < i_{m+1} \leqq k} f(p_{i_1} \dots p_{i_{m+1}}) + \tag{8}$$

$$+\binom{m+1}{m} \sum_{1 \leqq i_1 < \dots < i_{m+2} \leqq k} f(p_{i_1} \dots p_{i_{m+2}}) + \dots + (-1)^{k+m} \binom{k-1}{m} f(p_1 \dots p_k).$$

Dans le cas où $f(n) = p_r(n)$, $(r \geqq 1)$, où $p_r(n)$ désigne le «r» ième plus petit facteur premier de n. L'équation (8) nous permet d'obtenir une relation intéressante qui lie $\sum_{d|n} \mu_m(d) p_r(d)$ avec une expression impliquant la fonction $P_r(n)$, qui désigne le «r» ième plus grand facteur premier de n. Plus précisément, on démontre le résultat suivant :

THÉORÈME 6. *Soit* $n \geqq 1$ *et* $k=\omega(n)$ *alors pour tout entier* $m \geqq 0$, *on a*

$$\sum_{d|n} \mu_m(d) p_r(d) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(-1)^{m+r+k}}{\binom{m}{r-1}} \displaystyle\sum_{i=\max\{r,k-m\}}^{k+r-m-1} (-1)^i \binom{i-1}{r-1} \binom{k-i}{m-r+1} \binom{m}{m+i-k} P_{k-i+1}(n) & \\ & si \quad 1 \leqq r \leqq m+1 \\ (-1)^{m+r+k} \displaystyle\sum_{i=\max\{r,k-m\}}^{k} (-1)^i \binom{i-1}{r-1} \binom{r-1}{m-k+i} P_{k-i+1}(n) & si \quad r \geqq m+1. \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Soit $1 \leqq r \leqq m+1$ et posons $f(n)=p_r(n)$. Puisque $p_r(1)=0$, alors pour $\omega(n)>m$, l'équation (8) devient

$$\sum_{d|n} \mu_m(d) p_r(d) = -\sum_{1 \leqq i_1 < \ldots < i_r < \ldots < i_{m+1} \leqq k} p_{i_r} + \binom{m+1}{m} \sum_{1 \leqq i_1 < \ldots < i_r < \ldots < i_{m+2} \leqq k} p_{i_r} -$$

$$-\binom{m+2}{m} \sum_{1 \leqq i_1 < \ldots < i_r < \ldots < i_{m+3} \leqq k} p_{i_r} + \ldots + (-1)^{m+k} \binom{k-1}{m} p_r,$$

et en utilisant le lemme 3, on peut écrire

$$\sum_{d|n} \mu_m(d) p_r(d) =$$

$$= -\sum_{j=r}^{k+r-m-1} \binom{j-1}{r-1} \binom{k-j}{m+1-r} p_j + \binom{m+1}{m} \sum_{j=r}^{k+r-m-2} \binom{j-1}{r-1} \binom{k-j}{m+2-r} p_j + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{k+r-m-i} \binom{k+r-i-1}{m} \sum_{j=r}^{i} \binom{j-1}{r-1} \binom{k-j}{k-i} p_j + \ldots + (-1)^{k+m} \binom{k-1}{m} p_r.$$

Or le coefficient de p_i, $1 \leqq r \leqq i \leqq k+r-m-2$ est égal à

$$-\left\{\binom{i-1}{r-1} \binom{k-i}{m+1-r} - \binom{i-1}{r-1} \binom{m+1}{m} \binom{k-i}{m+2-r} + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + (-1)^{k+r-m-i-1} \binom{k+r-i-1}{m} \binom{i-1}{r-1}\right\} =$$

$$= -\binom{i-1}{r-1} \sum_{j=0}^{k+r-m-i-1} (-1)^j \binom{m+j}{m} \binom{k-i}{m+j+1-r} =$$

$$= -\frac{\binom{i-1}{r-1} \binom{k-i}{m+1-r}}{\binom{m}{r-1}} \sum_{j=0}^{k+r-m-i-1} (-1)^j \binom{m+j}{r-1} \binom{k+r-m-i-1}{j}$$

et d'après le lemme 4, ce dernier terme vaut

$$\frac{\binom{i-1}{r-1}\binom{k-i}{m+1-r}}{\binom{m}{r-1}}(-1)^{k+r-m-i}\binom{m}{m+i-k}.$$

De plus, le facteur de $p_{k+r-m-1}$ est $-\binom{k+r-m-2}{r-1}$, d'où pour $1 \leqq r \leqq m+1$ on a

$$\sum_{d|n} \mu_m(d)p_r(d) = -\binom{k+r-m-2}{r-1}p_{k+r-m-1}+$$

$$+\frac{(-1)^{k+m+r}}{\binom{m}{r-1}}\sum_{i=\max\{r,k-m\}}^{k+r-m-2}(-1)^i\binom{i-1}{r-1}\binom{k-i}{m+1-r}\binom{m}{m+i-k}p_i =$$

$$= \frac{(-1)^{k+m+r}}{\binom{m}{r-1}}\sum_{i=\max\{r,k-m\}}^{k+r-m-1}(-1)^i\binom{i-1}{r-1}\binom{k-i}{m+1-r}\binom{m}{m+i-k}p_i$$

et ceci est le résultat de la première partie.

Supposons maintenant $m+1 \leqq r \leqq \omega(n)=k$, alors (8) devient

$$\sum_{d|n} \mu_m(d)p_r(d) =$$

$$= (-1)^{m+r}\binom{r-1}{m}\sum_{1\leqq i_1<\ldots<i_r\leqq k} p_{i_r}+(-1)^{m+r+1}\binom{r}{m}\sum_{1\leqq i_1<\ldots<i_{r+1}\leqq k} p_{i_r}+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{m+k}\binom{k-1}{m}p_r.$$

En utilisant le lemme 3, cette dernière identité devient

$$\sum_{d|n} \mu_m(d)p_r(d) = (-1)^{m+r}\binom{r-1}{m}\sum_{j=r}^{k}\binom{j-1}{r-1}p_j+$$

$$+(-1)^{m+r+1}\binom{r}{m}\sum_{j=r}^{k-1}\binom{j-1}{r-1}\binom{k-j}{1}p_j+\ldots+(-1)^{m+k}\binom{k-1}{m}p_r.$$

Par conséquent le facteur qui multiplie p_i, $r \leqq i \leqq k-1$ est

$$(-1)^{m+r}\left\{\binom{r-1}{m}\binom{i-1}{r-1}-\binom{r}{m}\binom{i-1}{r-1}\binom{k-i}{1}+\ldots+(-1)^{k-i}\binom{r+k-i-1}{m}\binom{i-1}{r-1}\right\} =$$

$$= (-1)^{m+r}\binom{i-1}{r-1}\sum_{j=0}^{k-i}(-1)^j\binom{k-i}{j}\binom{r+j-1}{m}$$

et en utilisant le lemme 4, ce coefficient est égal à

$$(-1)^{m+r+k+i}\binom{i-1}{r-1}\binom{r-1}{m+i-k}.$$

Ainsi on obtient

$$\sum_{d|n} \mu_m(d) p_r(d) =$$

$$= (-1)^{m+r} \binom{r-1}{m} \binom{k-1}{r-1} p_k + \sum_{i=\max\{r,k-m\}}^{k-1} (-1)^{m+r+k+i} \binom{i-1}{r-1} \binom{r-1}{m+i-k} p_i$$

et ceci achève la démonstration de ce résultat.

Le prochain résultat est un cas particulier du théorème 6 et a été énoncé par Alladi [1].

Corollaire. Soir $r \geqq 1$ un entier. Alors pour tout entier $m \geqq 0$, on a

$$\sum_{d|n} \mu(d) p_r(d) = (-1)^r \binom{\omega(n)-1}{r-1} P_1(n)$$

et

$$\sum_{d|n} \mu_m(d) p_1(d) = -P_{m+1}(n).$$

Inversant les rôles du plus grand facteur premier et du plus petit facteur premier, le théorème 6 devient

Théorème 7. *Pour tout entier* $m \geqq 0$, *on a*

$$\sum_{d|n} \mu_m(d) F_r(d) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(-1)^{m+r+k}}{\binom{m}{r-1}} \displaystyle\sum_{i=\max\{r,k-m\}}^{k+r-m-1} (-1)^i \binom{i-1}{r-1} \binom{k-i}{m+1-r} \binom{m}{m+i-k} p_{k+1-i}(n) & \\ & si \quad 1 \leqq r \leqq m+1 \\ (-1)^{m+r+k} \displaystyle\sum_{i=\max\{r,k=m\}}^{k} (-1)^i \binom{i-1}{r-1} \binom{r-1}{m+i-k} p_{k+1-i}(n) & si \quad r \geqq m+1 \end{cases}$$

où $k = \omega(n)$.

Encore une fois, le résultat suivant déjà obtenu par Alladi [1] découle immédiatement du théorème 7.

Corollaire. Soit $r \geqq 1$ un entier. Alors pour tout entier $m \geqq 0$, on a

$$\sum_{d|n} \mu(d) P_r(d) = (-1)^r \binom{\omega(n)-1}{r-1} p_1(n)$$

et

$$\sum_{d|n} \mu_m(d) P_1(d) = -p_{m+1}(n).$$

THÉORÈME 8. *Pour tout entier* $m \geqq 0$, *on a*

$$\sum_{d|n} \mu_m(d)\mu(d) =$$

$$= \begin{cases} 1 & si \quad \omega(n) \leqq m \\ (-1)^m \left(1 + \dfrac{(-1)^{m+1}(\omega(n))!}{m!(\omega(n)-m-1)!} \displaystyle\sum_{j=1}^{m+1} (-1)^j \binom{m}{m+1-j} \dfrac{2^{\omega(n)+j-m-1}-1}{\omega(n)+j-m-1}\right) & \\ & si \quad \omega(n) > m. \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. D'après (8), on a pour $k = \omega(n) > m$

$$\sum_{\substack{d|n \\ d>1}} \mu_m(d)\mu(d) = -\sum_{1 \leqq i_1 < \ldots < i_{m+1} \leqq k} (-1)^{m+1} + \binom{m+1}{m} \sum_{1 \leqq i_1 < \ldots < i_{m+2} \leqq k} (-1)^{m+2} -$$

$$-\binom{m+2}{m} \sum_{1 \leqq i_1 < \ldots < i_{m+3} \leqq k} (-1)^{m+3} + \ldots + (-1)^m \binom{k-1}{m},$$

et en utilisant le lemme 1, on a

$$\sum_{\substack{d|n \\ d>1}} \mu_m(d)\mu(d) = (-1)^m \sum_{j=0}^{k-m-1} \binom{m+j}{m} \binom{k}{m+j+1} =$$

$$= (-1)^m \frac{k!}{m!(k-m-1)!} \sum_{j=0}^{k-m-1} \frac{\binom{k-m-1}{j}}{m+1-j} =$$

$$= (-1)^m \frac{k!}{m!(k-m-1)!} \sum_{j=1}^{m+1} (-1)^{m+1-j} \binom{m}{m+1-j} \frac{2^{k-m-1+j}-1}{k-m-1+j}$$

où cette dernière égalité a été obtenue en utilisant l'identité (1.12) de [4].

REMARQUE. Il est intéressant de remarquer que dans le cas où $m=0$, on retrouve la relation bien connue $\sum_{d|n} \mu^2(d) = 2^{\omega(n)}$.

6. Autres fonctions arithmétiques

Considérons maintenant le cas où $g(n) = \varphi(n)$, la fonction φ d'Euler. Alors (1) devient

$$\varphi_m(n) = \sum_{\substack{d|n \\ \omega(d) \leqq m}} \varphi(n/d).$$

THÉORÈME 9. *Pour chaque entier* $m \geqq 0$, *on a*

$$\varphi_m(n) = \sum_{\substack{1 \leqq k \leqq n \\ \omega((k,n)) \leqq m}} 1.$$

DÉMONSTRATION. Soit $A = \{k | 1 \leqq k \leqq n,\ \omega((k, n)) \leqq m\}$. Séparons les entiers de A de la façon suivante : Si d est un diviseur de n tel que $\omega(d) \leqq m$, alors l'entier

« a » appartient à C_d si $(a, n)=d$, c'est-à-dire,

$$C_d = \{a|(a,n)=d,\ 1 \leqq a \leqq n,\ \omega(d) \leqq m\} =$$
$$= \left\{k\left|\left(k, \frac{n}{d}\right) = 1,\ 1 \leqq k \leqq \frac{n}{d},\ \omega(d) \leqq m\right.\right\}.$$

Ainsi, on obtient

$$\# C_d = \varphi(n/d) \quad \text{tel que} \quad \omega(d) \leqq m.$$

Puisque chaque entier de A appartient à exactement une classe C_d, alors

$$\# A = \sum_{\substack{d|n \\ \omega(d) \leqq m}} \varphi(n/d),$$

ce qui termine la preuve de ce résultat.

Définissons les fonctions suivantes

$$1(n) = 1 \quad \text{et} \quad I(n) = n \quad \text{pour chaque} \quad n \geqq 1.$$

Puisque

$$1(n) = \sum_{d|n} \mu(d) d(n/d) \quad \text{où} \quad d(n) = \sum_{d|n} 1$$
$$I(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \sigma(n/d) \quad \text{où} \quad \sigma(n) = \sum_{d|n} d$$
$$J(k;\ n) = \sum_{d|n} \mu(d) \left(\frac{n}{d}\right)^k, \quad k \geqq 1,$$

elle est appelée la fonction de Jordan.

Pour $k=1$, on obtient

$$J(1;\ n) = \varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d}$$

a fonction d'Euler. En utilisant la notation de (1) et le théorème 4, on à le résultat suivant.

Théorème 10. *Soit* $n \geqq 1$, *alors pour chaque entier* $m \geqq 0$, *on a*

$$1_m(n) = \sum_{d|n} \mu_m(d)\, d(n/d), \quad I_m(n) = \sum_{d|n} \mu_m(d) \sigma(n/d),$$
$$J_m(k;\ n) = \sum_{d|n} \mu_m(d) \left(\frac{n}{d}\right)^k, \quad \varphi_m(n) = \sum_{d|n} \mu_m(d) \frac{n}{d}.$$

En utilisant ce théorème, on peut à l'aide du théorème 5 énoncer le résultat qui suit.

Théorème 11. *Soit* $n \geqq 1$, *alors pour chaque entier* $m \geqq 0$, *on a*

$$d_m(n) = \sum_{d|n} 1_m(d), \quad \sigma_m(n) = \sum_{d|n} I_m(d),$$
$$(I_m(n))^k = \sum_{d|n} J_m(k;\ d), \quad I_m(n) = \sum_{d|n} \varphi_m(d).$$

REMARQUE. Ces trois derniers résultats sont des identités connues lorsque $m=0$ (voir [2]). Nous terminerons cette section par une généralisation des sommes de Ramanujan. Soit k et n des entiers positifs. Il est bien connu que

$$\sum_{r=1}^{k} e^{2\pi i(nr/k)} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k\nmid n \\ n & \text{si} \quad k|n. \end{cases} \tag{9}$$

Pour chaque entier $m\geqq 0$, posons

$$c_k(m;\, n) = \sum_{\substack{r=1 \\ \omega((r,k))\leqq m}}^{k} e^{2\pi i(rn/k)}. \tag{10}$$

Lorsque $m=0$, on obtient les sommes de Ramanujan. De plus, on observe que lorsque $k|n$, (10) devient $c_k(m;\, n)=\varphi_m(k)$, d'après le théorème 9.

THÉORÈME 12. *Soit $k\geqq 1$ et $n\geqq 1$ des entiers. Alors pour chaque entier $m\geqq 0$ on a*

$$c_k(m;\, n) = \sum_{d|(k,n)} \mu_m(k/d)\, d.$$

DÉMONSTRATION. En utilisant (5), on peut écrire

$$c_k(m;\, n) = \sum_{\substack{r=1 \\ \omega((r,k))\leqq m}}^{k} e^{2\pi i(rn/k)} = \sum_{r=1}^{k} e^{2\pi i(rn/k)} \sum_{d|(r,k)} \mu_m(d) =$$

$$= \sum_{d|k} \mu_m(d) \sum_{\substack{r\equiv 0 \pmod d \\ 1\leqq r\leqq k}} e^{2\pi i(rn/k)}.$$

Soit $r=jd$, $j=1, 2, \dots, k/d$, alors

$$c_k(m;\, n) = \sum_{d|k} \mu_m(d) \sum_{j=1}^{k/d} e^{2\pi i(jn/(k/d))} = \begin{cases} \sum_{d|k} \mu_m(d) \dfrac{k}{d} & \text{si} \quad \dfrac{k}{d}|n \\ 0 & \text{si} \quad \dfrac{k}{d}\nmid n, \end{cases}$$

d'après (9). Soit $k/d=r$, alors $d=k/r$ et ainsi on obtient le résultat.

COROLLAIRE. *Pour chaque entier $m\geqq 0$, on a $c_k(m;\, 1)=\mu_m(k)$.*

THÉORÈME 13. *Pour chaque entier $m\geqq 0$, on a*

$$\sum_{d|n} c_k(m;\, d) = \begin{cases} I_m(n) & si \quad \dfrac{n}{d}|k \\ 0 & si \quad \dfrac{n}{d}\nmid k. \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Posons

$$\delta_k(d) = \begin{cases} d & \text{si} \quad d|k \\ 0 & \text{si} \quad d\nmid k, \end{cases}$$

alors le théorème 12 peut s'écrire sous la forme

$$c_k(m;\, n) = (\mu_m * \delta_k)(n)$$

ou encore

$$(1*c_k(m;\ n))(n) = ((1*\mu_m)*\delta_k)(n) = (\beta*\delta_k)(n)$$

où $\beta(n)$ a été définie dans (5). Ainsi on obtient

$$\sum_{d|n} c_k(m;\ d) = \sum_{\substack{d|n \\ \omega(d)\leqq m}} \delta_k(n/d)$$

ce qui établit le résultat.

Lorsque $m=0$, on obtient le résultat suivant bien connu

COROLLAIRE. Soit $n\geqq 1$, alors

$$\sum_{d|n} c_k(0,\ d) = \begin{cases} n & si \quad n|k \\ 0 & si \quad n\nmid k. \end{cases}$$

Bibliographie

[1] K. Alladi, Duality between prime factors and an application to the prime number theorem for arithmetic progressions, *Journ. of Number Theory*, **9** (1977), 436—451.
[2] T. M. Apostol, *Introduction to analytic number*, Springer-Verlag (1976).
[3] J. M. De Koninck et A. Mercier, *Approche élémentaire de l'étude des fonctions arithmétiques*, Les Presses de l'Université Laval, (1982).
[4] H. W. Gould, *Combinatorial identities* (Morgantown, West Virginia, publié par l'auteur, 1972).
[5] J. Riordan, *Combinatorial identities*, John Wiley and Sons (1968).

(Reçu le 23. janvier 1987.)

DÉPARTMENT DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ LAVAL
QUÉBEC, P. QUE
CANADA, G1K 7P4

DÉPARTMENT DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC
CHICOUTIMI, P. QUE
CANADA, G7H 2B1