ACTA ARITHMETICA
LII (1989)

Les fonctions arithmétiques et le plus grand facteur premier

par

JEAN-MARIE DE KONINCK * (Québec, Canada),
et ARMEL MERCIER ** (Chicoutimi, Canada)

1. Introduction. Pour chaque nombre naturel $n \geqslant 2$, soit $P(n)$ son plus grand facteur premier. En 1977, Alladi et Erdős [1] démontraient que

$$\sum_{2 \leqslant n \leqslant x} P(n) \sim \frac{\pi^2}{12} \cdot \frac{x^2}{\log x}, \tag{1}$$

(ici $f(x) \sim g(x)$ signifie que $\lim_{x \to \infty} f(x)/g(x) = 1$) ce qui entraîne que l'ordre moyen de $P(n)$ est $\frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{n}{\log n}$. De plus, en posant $\beta(n) = \sum_{p \mid n} p$, ils démontraient que

$$\sum_{2 \leqslant n \leqslant x} \beta(n) \sim \frac{\pi^2}{12} \cdot \frac{x^2}{\log x}. \tag{2}$$

En 1984, De Koninck et Ivić [4] obtenaient des développements asymptotiques pour les sommes apparaissant dans (1) et (2). Mais en comparant (1) et (2) on est amené à se demander si, étant donnée une fonction additive f, on aura

$$\sum_{2 \leqslant n \leqslant x} f(P(n)) \sim \sum_{2 \leqslant n \leqslant x} f(n) \tag{3}$$

tout comme c'est le cas lorsque $f = \beta$. Dans le présent travail, on comparera les deux expressions apparaissant en (3) et en particulier on verra que (3) est vérifiée si la suite $(f(p))_{p \text{ premier}}$, qui définit entièrement la fonction $f(n)$ fortement additive, croît suffisamment vite. Il sera tout de même surprenant de constater que pour une grande classe de fonctions fortement additives

* Travail fait dans le cadre de la subvention CRSNG A-8729.
** Travail fait dans le cadre de la subvention CRSNG A-3508.

$f(n)$, pour lesquelles il existe une fonction $L(x)$ dite à oscillation lente telle que $f(p) = L(p)$ pour chaque premier p, la relation (3) est toujours valable.

2. Quelques définitions et l'énoncé du résultat principal. On dira qu'une fonction additive $f\colon \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{R}$ est fortement additive si $f(p^\alpha) = f(p)$ quelque soit p premier et $\alpha \in \boldsymbol{N}$. Soit $A > 0$, on dira que $R\colon [A, \infty[\to \boldsymbol{R}^+$ mesurable sur $[A, \infty[$ est à variation régulière si pour chaque $a > 0$, on a $\lim_{x\to\infty} \dfrac{R(ax)}{R(x)} = a^\varrho$ pour un certain nombre réel ϱ. Dans le cas où $\varrho = 0$, on dira que R est une fonction à oscillation lente, on utilisera habituellement la lettre L pour désigner une telle fonction et on dénotera par $\mathscr{L}$ l'ensemble de ces fonctions. Ces notions de fonctions à variation régulière ou à oscillation lente furent d'abord introduites par Karamata [8] en 1930; on en trouve une étude approfondie dans Seneta [10]: c'est là, entre autres, qu'on démontre que si R est à variation régulière, alors $R(x) = x^\varrho L(x)$ pour un certain $\varrho \in \boldsymbol{R}$ et $L \in \mathscr{L}$.

Enfin si, pour deux fonctions F_1 et F_2 telles que

$$\lim_{x\to\infty} F_i(x) = +\infty \qquad (i = 1, 2),$$

il existe une constante $c_0 \geqslant 0$ telle que

$$F_1(x) = \big(c_0 + o(1)\big) F_2(x), \qquad \text{pour } x \to \infty,$$

alors, si $c_0 > 0$, on dira que F_1 et F_2 sont du même ordre de grandeur (et on écrira parfois $F_1(x) \approx F_2(x)$) et, si $c_0 = 0$, on dira que F_1 est d'ordre inférieur à F_2.

Voici notre résultat principal.

THÉORÈME. *Soit $f\colon \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{R}$ une fonction fortement additive telle que $f(n) > 0$ pour $n \geqslant 2$. Supposons qu'il existe $R\colon [2, \infty[\to \boldsymbol{R}^+$ à variation régulière, c'est-à-dire $R(x) = x^\varrho L(x)$, où $\varrho \in \boldsymbol{R}$ et $L \in \mathscr{L}$, telle que $f(p) = R(p)$ pour chaque nombre premier p.*

(i) *Si $\varrho > 0$, alors*

$$\sum_{2\leqslant n\leqslant x} f\big(P(n)\big) \sim \sum_{2\leqslant n\leqslant x} f(n) \sim \frac{x^{\varrho+1}\zeta(\varrho+1)}{\varrho+1} \cdot \frac{L(x)}{\log x}, \tag{4}$$

où $\zeta(s)$ désigne la fonction Zeta de Riemann.

(ii) *Si $\varrho = 0$, posons $\lambda_L(x) = \lambda(x) = x(\log x) L'(x)/L(x)$;*

(a) *si $\lim_{x\to\infty} \lambda(x) = +\infty$, alors*

$$\sum_{2\leqslant n\leqslant x} f\big(P(n)\big) \sim \sum_{2\leqslant n\leqslant x} f(n) \sim x \int_2^x \frac{L(u)}{u \log u}\, du; \tag{5}$$

(b) *si $\lim_{x\to\infty} \lambda(x) = c > 0$, alors*

$$\sum_{2\leqslant n\leqslant x} f\big(P(n)\big) \sim D_c x L(x) \qquad \text{où } D_c = \int_0^\infty \frac{l(v)}{(v+1)^{c+1}}\, dv, \tag{6}$$

$l(v)$ étant la fonction définie par les équations (16) et

$$\sum_{2\leqslant n\leqslant x} f(n) \sim c^{-1} x L(x); \tag{7}$$

(c) *si $\lim_{x\to\infty} \lambda(x) = 0$ alors*

$$\sum_{2\leqslant n\leqslant x} f\big(P(n)\big) \sim x L(x) \tag{8}$$

et

$$\sum_{2\leqslant n\leqslant x} f(n) \sim x \int_2^x \frac{L(u)}{u \log u}\, du; \tag{9}$$

(d) *si $\lim_{x\to\infty} \lambda(x) = c < 0$, alors*

$$\sum_{2\leqslant n\leqslant x} f\big(P(n)\big) \sim D_c x L(x) \tag{10}$$

et

$$\sum_{2\leqslant n\leqslant x} f(n) \sim E_f x, \qquad \text{où } E_f = \sum_p f(p) p^{-1}; \tag{11}$$

(e) *si $\lim_{x\to\infty} \lambda(x) = -\infty$, alors*

$$\sum_{2\leqslant n\leqslant x} f\big(P(n)\big) = x \{L(x^{1/w_0(x)})\}^{1+o(1)}, \tag{12}$$

où $w = w_0(x)$ est la solution de

$$\lambda(x^{1/w}) + w \log w = 0;$$

de plus

$$\sum_{2\leqslant n\leqslant x} f(n) \sim E_f x. \tag{13}$$

(iii) *Si $\varrho < 0$, alors*

$$\sum_{2\leqslant n\leqslant x} f\big(P(n)\big) \sim x e^{-\sqrt{-2\varrho \log x \log\log x}\,(1+o(1))} \tag{14}$$

et

$$\sum_{2\leqslant n\leqslant x} f(n) \sim E_f x. \tag{15}$$

Remarques. 1. A la lecture de la démonstration on pourra facilement constater qu'il n'est pas du tout essentiel de limiter notre étude aux fonctions fortement additives. En effet, le lecteur pourra aisément voir que pour toute fonction additive f satisfaisant à la condition supplémentaire

$$\sum_{p>x}\sum_{\alpha\geqslant 2}\frac{f(p^\alpha)}{p^\alpha}=o\big(\min(1,\,L(x))\big),$$

le théorème est tout aussi valable. Nous exigerons ici la condition "fortement additive" pour simplifier le déroulement de la démonstration.

2. A la lecture de la démonstration du théorème, on sera en mesure de constater que la plupart des estimations (4)–(15) auraient pu être remplacées par des relations plus exactes impliquant des termes $O(\ldots)$, mais seuls les comportements asymptotiques représentaient ici pour nous les résultats les plus significatifs.

3. Il est intéressant de constater que lorsque $\varrho<0$ ainsi que lorsque $\varrho=0$ avec $\lim_{x\to+\infty}\lambda(x)=+\infty$, la relation

$$\sum_{2\leqslant n\leqslant x} f(P(n))\sim\sum_{2\leqslant n\leqslant x} f(n)$$

est valable (voir (4) et (5)). Toutefois lorsque $\varrho=0$ avec $\lim_{x\to+\infty}\lambda(x)=c>0$, on a plutôt

$$\sum_{2\leqslant n\leqslant x} f(P(n))\approx\sum_{2\leqslant n\leqslant x} f(n)$$

et enfin dans tous les autres cas on a

$$\sum_{2\leqslant n\leqslant x} f(P(n))=o\big(\sum_{2\leqslant n\leqslant x} f(n)\big).$$

3. Quelques résultats préliminaires. Au cours de la démonstration du théorème, on utilisera, entre autres, les deux résultats suivants connus:

THÉORÈME A. $L\in\mathscr{L}\Leftrightarrow$ *il existe une constante* $B_L=B>0$ *et des fonctions* v *et* η *telles que*

$$L(x)=\exp\left\{v(x)+\int_B^x\frac{\eta(t)}{t}\,dt\right\}$$

où $v(x)$ *tend vers une constante lorsque* $x\to+\infty$ *et où* $\eta(t)=o(1)$

$$\Leftrightarrow\ \eta_L(x):=\frac{xL'(x)}{L(x)}=o(1).$$

Démonstration. Voir E. Seneta [10].

Remarque. Sans perdre la généralité et surtout dans le but de simplifier la présentation de la démonstration du Théorème, on supposera que pour chaque fonction $L\in\mathscr{L}$, la fonction v correspondante est constante et ainsi on représentera les fonctions L sous la forme

$$L(x)=e^v\cdot\exp\int_B^x\frac{\eta(t)}{t}\,dt,$$

en supposant ainsi que v est un nombre réel qui dépend de L. On supposera de plus que, étant donné $L\in\mathscr{L}$, outre le cas où L est une fonction constante, la fonction correspondante η est une fonction continue et qu'à partir d'un certain rang elle est soit décroissante positive, auquel cas $L'(x)>0$ pour tout x suffisamment grand, ou alors croissante négative, auquel cas $L'(x)<0$ pour x suffisamment grand. Cette condition n'est pas vraiment restrictive, car quelque soit $L\in\mathscr{L}$, on peut toujours trouver une fonction $L_0\in\mathscr{L}$ qui possède les propriétés que l'on vient de mentionner et qui est telle que $L_0(x)\sim L(x)$. Or, comme on pourra le constater à la lecture de ce manuscrit, ce qui importe, c'est le comportement asymptotique de ces fonctions et non les valeurs exactes qu'elles assument.

THÉORÈME B. *Soit* $\psi(x,y)=\#\{n\leqslant x:\ P(n)\leqslant y\}$, *alors*

(a) *Il existe une constante* $K>0$ *telle que, pour* $x\geqslant y\geqslant 2$,

$$\psi(x,y)<xe^{-K\log x/\log y}.$$

(b) *Si on pose* $u=\log x/\log y$, *alors on a, uniformément pour* $1\leqslant u\leqslant(\log x)/(\log\log x)^{5/3+\varepsilon}$,

$$\psi(x,y)=xl(u)\left(1+O_\varepsilon\left(\frac{u\log(u+1)}{\log x}\right)\right),$$

lorsque $x\to+\infty$, *où* $l(u)$ *est la fonction continue définie par les équations*

$$\text{(16)}\qquad\begin{cases} l(u)=1 & \text{si } 0\leqslant u\leqslant 1,\\ ul'(u)=-l(u-1) & \text{si } u>1.\end{cases}$$

Démonstration. Pour (a) voir De Bruijn [3]; pour (b) voir Hildebrand [7]. Nous aurons également besoin des résultats suivants.

LEMME 1. *Soit* $L\in\mathscr{L}$. *Alors il existe une fonction réelle* φ *telle que* $\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty$ *et telle que*

$$L(x/n)=L(x)\big(1+O(\eta(\sqrt{x})^\varepsilon)\big),$$

uniformément pour $1\leqslant n\leqslant\varphi(x)$, *où* $0<\varepsilon<1$ *est arbitraire mais fixe. En particulier on peut choisir*

$$\varphi(x)=\exp\left(\frac{1}{|\eta_L(\sqrt{x})|^{1-\varepsilon}}\right).$$

Démonstration. Supposons que $L'(x)>0$, pour x suffisamment grand (le cas où $L'(x)<0$ est analogue et le cas où $L'(x)=0$ est trivial). Soit donc

$\varphi(x) = \exp\left(1/(\eta_L(\sqrt{x}))^{1-\varepsilon}\right)$ de sorte que $0 < \varphi(x) < \sqrt{x}$ pour tout $x > B_L$ et que $\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$. Alors pour x assez grand, on a

$$1 > L(x/\varphi(x))/L(x) = \exp\left(-\int_{x/\varphi(x)}^{x} \frac{\eta(t)}{t}\,dt\right)$$

$$> 1 - \int_{x/\varphi(x)}^{x} \frac{\eta(t)}{t}\,dt > 1 - \eta(x/\varphi(x)) \int_{x/\varphi(x)}^{x} \frac{dt}{t}$$

$$= 1 - \eta(x/\varphi(x)) \log \varphi(x) > 1 - \eta(\sqrt{x}) \log \varphi(x)$$

$$= 1 - (\eta(\sqrt{x}))^{\varepsilon},$$

ce qui démontre le lemme.

Lemme 2. *Soit $L \in \mathscr{L}$. Alors pour chaque $D > A_L$ et chaque $\delta > 0$, on a*

$$\int_D^x u^\delta L(u)\,du \sim \frac{x^{\delta+1}}{\delta+1} L(x).$$

Démonstration. En intégrant par parties, on obient

$$J_1(x) = \int_D^x u^\delta L(u)\,du = \frac{u^{\delta+1}}{\delta+1} L(u)\Big|_D^x - \frac{1}{\delta+1} \int_D^x u^{\delta+1} L'(u)\,du.$$

En remplaçant dans cette dernière intégrale $u^{\delta+1} L'(u)$ par la quantité équivalente $u^\delta L(u)\eta_L(u)$ et en utilisant le fait que $\eta_L(u) = o(1)$, on arrive à voir que

$$J_1(x) = \frac{x^{\delta+1}}{\delta+1} L(x) + o(J_1(x)),$$

d'où le résultat.

Lemme 3. *Soit $L \in \mathscr{L}$. Alors*

$$\lim_{x \to +\infty} (L(x))^{-1} \int_B^x \frac{L(u)}{u}\,du = +\infty.$$

Démonstration. Encore une fois, sans perdre la généralité, on suppose que $L'(x) > 0$ pour x assez grand. Posons ensuite $\varphi(x) = \exp\left(1/\sqrt{\eta_L(\sqrt{x})}\right)$ et choisissons x grand, alors, en utilisant le Lemme 1 (avec $\varepsilon = 1/2$), on aura

$$\int_B^x \frac{L(u)}{u}\,du > \int_{x/\varphi(x)}^{x} \frac{L(u)}{u}\,du > L(x/\varphi(x)) \int_{x/\varphi(x)}^{x} \frac{du}{u}$$

$$= L(x)\left(1 + O\left(\frac{1}{\log \varphi(x)}\right)\right) \int_{x/\varphi(x)}^{x} \frac{du}{u} \gg L(x) \log \varphi(x),$$

ce qui démontre le lemme puisque $\varphi(x) \to +\infty$ lorsque $x \to +\infty$.

Parmi les fonctions à oscillation lente, nous allons distinguer les fonctions dites à oscillation très lente définies ainsi:

Définition. Une fonction L: $[A, +\infty[\to \boldsymbol{R}^+$ est dite à *oscillation très lente* si la fonction M: $[A, +\infty[\to \boldsymbol{R}^+$ définie par $M(x) = L(e^x)$ est à oscillation lente. On dénotera par $\mathscr{L}^*$ l'ensemble des fonctions à oscillation très lente.

On démontre maintenant deux lemmes qui caractérisent les fonctions appartenant à $\mathscr{L}^*$.

Lemme 4. $L \in \mathscr{L}^* \Leftrightarrow L(x^a) \sim L(x)$, *pour chaque $a > 0$.*

Démonstration. Posons $M(x) = L(e^x)$ et soit $a > 0$. Soit d'abord $L \in \mathscr{L}^*$, alors comme $M \in \mathscr{L}$, on a

$$L(x^a) = L(e^{a \log x}) = M(a \log x) \sim M(\log x) = L(e^{\log x}) = L(x).$$

Supposons maintenant que $L(x^a) \sim L(x)$ pour chaque $a > 0$, alors posons $y = e^x$. On veut montrer que $M \in \mathscr{L}$. Soint donc $a > 0$, alors

$$M(ax) = L(e^{ax}) = L(e^{a \log y}) = L(y^a) \sim L(y) = L(e^x) = M(x).$$

Ceci démontre le lemme 4.

Lemme 5. *Soit $L \in \mathscr{L}$. Posons $\eta_L(x) = xL'(x)/L(x)$ et $\lambda_L(x) = (\log x)\eta_L(x)$. Alors*

$$L \in \mathscr{L}^* \Leftrightarrow \eta_L(x) = o(1/\log x) \Leftrightarrow \lambda_L(x) = o(1).$$

Démonstration. Il est clair qu'il suffit de montrer la première implication double. Soit donc $M(x) = L(e^x)$. Supposons que $L'(x) > 0$ (le cas où $L'(x) \leqslant 0$ est analogue) pour x suffisamment grand. Si $\eta_L(x) = o(1/\log x)$, il faut montrer que $\eta_M(x) = o(1)$. Or

$$\eta_M(x) = \frac{xL'(e^x)e^x}{L(e^x)} = x\eta_L(e^x) < \varepsilon x \frac{1}{\log e^x} = \varepsilon.$$

Réciproquement, si $L \in \mathscr{L}^*$, alors $\eta_L(x) = o(1)$. Donc si on pose $y = e^x$, on aura successivement

$$x\eta_L(e^x) = o(1),$$

$$\eta_L(e^x) = o(1/x),$$

$$\eta_L(y) = o(1/\log y),$$

d'où le résultat.

En terminant ce paragraphe, mentionnons qu'étant donnée une fonction $L \in \mathscr{L}$, on utilisera les notations suivantes:

$$\eta_L(x) = \eta(x) = \frac{xL'(x)}{L(x)},$$

$$\lambda_L(x) = \lambda(x) = x \log x \frac{L'(x)}{L(x)},$$

$$\varphi_L(x) = \varphi(x) = \exp\left(1/\sqrt{|\eta(\sqrt{x})|}\right),$$

$$F_L(x) = F(x) = \int_2^x \frac{L(u)}{u \log u}\, du.$$

4. Les relations de bases. Puisqu'on limite notre étude aux fonctions fortement additives, on a la représentation

$$\sum_{n \leqslant x} f(n) = \sum_{2 \leqslant n \leqslant x} \sum_{p \mid n} f(p) = \sum_{p \leqslant x} f(p) \left[\frac{x}{p}\right]. \tag{17}$$

Par ailleurs, en rappelant que $\psi(x, y) = \# \{n \leqslant x \colon P(n) \leqslant y\}$, il est clair que

$$\begin{aligned} \sum_{2 \leqslant n \leqslant x} f(P(n)) &= \sum_{p \leqslant x} f(p) \sum_{\substack{n \leqslant x \\ P(n) = p}} 1 = \sum_{p \leqslant x} f(p) \sum_{\substack{m \leqslant x/p \\ P(m) \leqslant p}} 1 \\ &= \sum_{p \leqslant x} f(p) \psi(x/p, p). \end{aligned} \tag{18}$$

Comme $\psi(x/p, p) = [x/p]$ lorsque $\sqrt{x} < p \leqslant x$, (18) pourra aussi s'écrire

$$\begin{aligned} \sum_{2 \leqslant n \leqslant x} f(P(n)) &= \sum_{p \leqslant \sqrt{x}} f(p) \psi\left(\frac{x}{p}, p\right) + \sum_{\sqrt{x} < p \leqslant x} f(p) \left[\frac{x}{p}\right] \\ &= \sum_{p \leqslant x} f(p) \left[\frac{x}{p}\right] - \sum_{p \leqslant \sqrt{x}} f(p) \left[\frac{x}{p}\right] + \sum_{p \leqslant \sqrt{x}} f(p) \psi\left(\frac{x}{p}, p\right) \\ &= \Sigma_1 - \Sigma_2 + \Sigma_3. \end{aligned} \tag{19}$$

On verra que dans le cas où $\varrho > 0$, les expressions Σ_2 et Σ_3 sont négligeables par rapport à Σ_1. Ainsi puisque Σ_1 coïncide avec $\sum_{2 \leqslant n \leqslant x} f(n)$, il s'ensuivra que

$$\sum_{2 \leqslant n \leqslant x} f(P(n)) \sim \sum_{2 \leqslant n \leqslant x} f(n).$$

Il en sera de même dans le cas où $\varrho = 0$ avec la condition $\lim_{x \to \infty} \lambda_L(x) = +\infty$. Toujours avec $\varrho = 0$, si $\lim_{x \to \infty} \lambda_L(x) = c > 0$, on verra que les sommes Σ_1, Σ_2 et Σ_3 sont toutes trois du même ordre de grandeur sans être toutefois asymptotiquement égales. Mais lorsque $\varrho = 0$ et $\lim_{x \to \infty} \lambda_L(x) = 0$, on verra que $\Sigma_1 \sim \Sigma_2$ et que $\Sigma_1 - \Sigma_2$ est du même ordre de grandeur que Σ_3. Ainsi dans ce cas de

même que dans les autres cas, la relation $\sum_{2 \leqslant n \leqslant x} f(P(n)) \sim \sum_{2 \leqslant n \leqslant x} f(n)$ n'est plus valable.

5. Le cas où $\varrho > 0$. Il est clair que les expressions Σ_2 et Σ_3 apparaissant dans (19) sont toutes deux d'ordre inférieur à $x \sum_{p \leqslant \sqrt{x}} f(p)/p$. Or pour $g(t) = t^{\varrho} L(t)$, $\varrho \geqslant 0$, on a, en dénotant par $\pi(t)$ le nombre de nombres premiers dans $[2, t]$ et en utilisant le théorème des nombres premiers sous la forme $\pi(t) = \mathrm{Li}(t) + E(t)$, où $E(t) \ll t e^{-\sqrt{\log t}}$,

$$\sum_{p \leqslant y} g(p) = \int_{2-0}^{y} g(t)\, d\pi(t) \sim \int_2^y \frac{g(t)}{\log t}\, dt.$$

Voilà pourquoi

$$\sum_{p \leqslant \sqrt{x}} \frac{f(p)}{p} \sim \int_2^{\sqrt{x}} \frac{R(t)}{t \log t}\, dt = \int_2^{\sqrt{x}} \frac{t^{\varrho} L(t)}{t \log t}\, dt \ll \int_2^{\sqrt{x}} t^{\varrho - 1 + \varepsilon}\, dt \ll x^{(\varrho + \varepsilon)/2}.$$

Ainsi Σ_2 et Σ_3 sont toutes deux $o\left(\frac{x^{\varrho+1} L(x)}{\log x}\right)$. Donc pour démontrer (4), il suffit de démontrer que

$$\Sigma_1 \sim \frac{x^{\varrho+1} \zeta(\varrho+1)}{\varrho+1} \cdot \frac{L(x)}{\log x}.$$

On pourrait être tenté d'écrire

$$\begin{aligned} \sum_{p \leqslant x} f(p) \left[\frac{x}{p}\right] &= x \sum_{p \leqslant x} \frac{f(p)}{p} + \sum_{p \leqslant x} f(p) \left(\left[\frac{x}{p}\right] - \frac{x}{p}\right) \\ &= x \sum_{p \leqslant x} \frac{f(p)}{p} + O\Big(\sum_{p \leqslant x} f(p)\Big) \end{aligned} \tag{20}$$

en espérant que la dernière somme à droite de (20) soit d'ordre inférieur à $x \sum_{p \leqslant x} f(p)/p$. Mais malheureusement les deux termes à droite de (20) sont (dans le cas où $\varrho > 0$) du même ordre de grandeur, nous mettant alors dans l'impossibilité d'obtenir une formule asymptotique par cette approche. Il nous faut donc utiliser une autre astuce. On écrit alors

$$\sum_{p \leqslant x} f(p) \left[\frac{x}{p}\right] = \sum_{p \leqslant x} f(p) \sum_{n \leqslant x/p} 1 = \sum_{n \leqslant x} \sum_{p \leqslant x/n} f(p). \tag{21}$$

Mais en utilisant à nouveau le théorème des nombres premiers on obtient

$$\sum_{p \leqslant y} f(p) = \int_{2-0}^{y} R(t)\, d\pi(t) \sim \int_2^y \frac{R(t)}{\log t}\, dt.$$

Et en faisant appel au Lemme 2, on obtient, puisque $R(t) = t^{\varrho} L(t)$, que

$$\sum_{p \leqslant y} f(p) \sim \frac{y^{\varrho+1}}{\varrho+1} \cdot \frac{L(y)}{\log y}.$$

Ainsi (21) devient, en supposant que $x = X + \frac{1}{2}$, avec $X \in N$,

$$\sum_{p \leqslant x} f(p) \left[\frac{x}{p}\right] \sim \sum_{1 \leqslant n \leqslant x} \frac{(x/n)^{\varrho+1} L(x/n)}{(\varrho+1) \log (x/n)}. \tag{22}$$

Mais cette dernière somme peut être remplacée par $\Sigma_{\mathrm{I}} + \Sigma_{\mathrm{II}} + \Sigma_{\mathrm{III}}$, où chacune de ces trois sommes sont restreintes respectivement à $\{1 \leqslant n \leqslant \varphi(x)\}$, $\{\varphi(x) < n \leqslant \sqrt{x}\}$ et $\{\sqrt{x} < n \leqslant x\}$. Évaluons d'abord Σ_{I} laquelle constituera d'ailleurs la seule somme importante. Grâce au Lemme 1, on peut écrire

$$\begin{aligned}\Sigma_{\mathrm{I}} &= \frac{x^{\varrho+1}}{\varrho+1} \sum_{1 \leqslant n \leqslant \varphi(x)} \frac{L(x)\big(1 + O(1/\log \varphi(x))\big)}{n^{\varrho+1}} \cdot \frac{1}{\log x} \left(1 + O\left(\frac{\log n}{\log x}\right)\right) \\ &= \frac{x^{\varrho+1} L(x) \big(1 + o(1)\big)}{(\varrho+1) \log x} \sum_{1 \leqslant n \leqslant \varphi(x)} \frac{1}{n^{\varrho+1}} \left(1 + O\left(\frac{\log n}{\log x}\right)\right).\end{aligned}$$

Or puisque

$$\sum_{1 \leqslant n \leqslant \varphi(x)} \frac{1}{n^{\varrho+1}} = \zeta(\varrho+1) + O\left(\frac{1}{\varphi^{\varrho}(x)}\right)$$

et que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^{\varrho+1}} = O(1),$$

on a que

$$\Sigma_{\mathrm{I}} \sim \frac{x^{\varrho+1}}{\varrho+1} \cdot \frac{L(x)}{\log x} \zeta(\varrho+1).$$

Il nous reste à estimer Σ_{II} et Σ_{III}. D'abord considérons Σ_{III}. Puisque $L(x)$ est soit décroissante, soit non-décroissante, dans $]\sqrt{x}, x]$, on a

$$\begin{aligned}\Sigma_{\mathrm{III}} &= \frac{x^{\varrho+1}}{\varrho+1} \sum_{\sqrt{x} < n \leqslant x} \frac{1}{n^{\varrho+1}} \cdot \frac{L(x/n)}{\log (x/n)} \leqslant x^{\varrho+1} \max\big(L(x), L(\sqrt{x})\big) \int_{\sqrt{x}}^{\infty} \frac{dt}{t^{\varrho+1}} dt \\ &\leqslant x^{\varrho/2+1} \max\big(L(x), L(\sqrt{x})\big) \\ &\leqslant x^{\varrho/2+1+\varepsilon} = o\left(\frac{x^{\varrho+1} L(x)}{\log x}\right).\end{aligned}$$

Nous évaluons maintenant Σ_{II}. Si L est non-décroissante, alors, pour $\varphi(x) < n \leqslant \sqrt{x}$, on a $L(x/n) \leqslant L(\sqrt{x}) \leqslant L(x)$. Par contre, si L est décroissante,

alors, pour $\varphi(x) < n \leqslant \sqrt{x}$, on a, par le Lemme 1,

$$L(x/n) \leqslant L(x/\varphi(x)) = L(x)\big(1 + o(1)\big).$$

Donc dans les deux cas on a

$$\begin{aligned}\Sigma_{\mathrm{II}} &= \frac{x^{\varrho+1}}{\varrho+1} \sum_{\varphi(x) < n \leqslant \sqrt{x}} \frac{1}{n^{\varrho+1}} \cdot \frac{L(x/n)}{\log (x/n)} \\ &\leqslant \frac{x^{\varrho+1} L(x)}{\log x} \sum_{\varphi(x) < n \leqslant \sqrt{x}} \frac{1}{n^{\varrho+1}} \left(1 + O\left(\frac{\log n}{\log x}\right)\right) \\ &\leqslant \frac{x^{\varrho+1} L(x)}{\log x} \int_{\varphi(x)}^{\infty} \frac{dt}{t^{\varrho+1}} \leqslant \frac{x^{\varrho+1} L(x)}{(\log x)\, \varphi^{\varrho}(x)} = o\left(\frac{x^{\varrho+1} L(x)}{\log x}\right).\end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration de la partie (i).

6. Le cas $\varrho = 0$ avec $\lambda_L(x) \to +\infty$. On démontre d'abord que, si x est suffisamment grand,

$$L(x) > 2^{\lambda(\sqrt{x})} L(\sqrt{x}). \tag{23}$$

En effect, pour x assez grand, on a

$$\begin{aligned}\frac{L(x)}{L(\sqrt{x})} &= \exp \int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{\eta(t)}{t} dt = \exp \int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{\lambda(t)}{t \log t} dt \\ &> \exp\left(\lambda(\sqrt{x}) \int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{dt}{t \log t}\right) = \exp\big(\lambda(\sqrt{x}) \log 2\big) = 2^{\lambda(\sqrt{x})},\end{aligned}$$

ce qui prouve (23). Posons maintenant $F(x) = \int_{2}^{x} \frac{L(t)}{t \log t} dt$. Nous allons utiliser (23) pour démontrer que

$$F(\sqrt{x}) = o\big(F(x)\big). \tag{24}$$

Par suite, comme

$$\Sigma_1 = x \sum_{p \leqslant x} \frac{f(p)}{p} + O\Big(\sum_{p \leqslant x} f(p)\Big) \sim xF(x) + O\left(\int_{2}^{x} \frac{L(t)}{\log t} dt\right) \sim xF(x),$$

et comme (24) nous permet de conclure que Σ_2 et Σ_3 sont toutes deux d'ordre inférieur à $xF(x)$, la partie (ii) (a) sera démontrée. Il nous suffit donc de prouver (24). Pour cela, on va démontrer que, quelque soit $M > 0$, on a

$$F(x) > MF(\sqrt{x}),$$

si x est suffisamment grand.

Puisqu'il existe $X_1 > 0$ tel que (23) est vérifiée pour tout $x > X_1$, alors pour chacun de ces x on aura

$$F(x) = \int_2^x \frac{L(t)}{t\log t}\,dt = \int_2^{X_1} \frac{L(t)}{t\log t}\,dt + \int_{X_1}^x \frac{L(t)}{t\log t}\,dt$$

$$= O(1) + \int_{X_1}^x \frac{L(t)}{t\log t}\,dt > O(1) + \int_{X_1}^x \frac{2^{\lambda(\sqrt{t})}L(\sqrt{t})}{t\log t}\,dt$$

$$> c_1 \int_4^x \frac{2^{\lambda(\sqrt{t})}L(\sqrt{t})}{t\log t}\,dt,$$

pour une certaine constante $c_1 > 0$. Mais en posant $\sqrt{t} = s$ dans cette dernière intégrale, on aura

$$F(x) > c_1 \int_2^{\sqrt{x}} 2^{\lambda(s)} \frac{L(s)}{s\log s}\,ds.$$

Choisissons maintenant $X_2 > X_1$ tel que $2^{\lambda(X_2)} > 2M/c_1$. Alors pour $x > X_2$

$$F(x) > c_1 \int_2^{X_2} \frac{2^{\lambda(s)}L(s)}{s\log s}\,ds + c_1 \int_{X_2}^{\sqrt{x}} \frac{2^{\lambda(s)}L(s)}{s\log s}\,ds$$

$$> c_2 F(X_2) + c_1 2^{\lambda(X_2)} \int_{X_2}^{\sqrt{x}} \frac{L(s)}{s\log s}\,ds$$

$$> c_2 F(X_2) + 2M \int_{X_2}^{\sqrt{x}} \frac{L(s)}{s\log s}\,ds,$$

pour une certaine constante $c_2 > 0$. On a donc obtenu que

$$F(x) > c_2 F(X_2) + 2M F(\sqrt{x}) - 2M F(X_2) = 2M F(\sqrt{x}) - (2M - c_2) F(X_2).$$

D'où

$$\frac{F(x)}{F(\sqrt{x})} > 2M - \frac{(2M-c_2)F(X_2)}{F(\sqrt{x})}.$$

Choisissons $X_3 > X_2$ de telle sorte que $(2M-c_2)F(X_2)/F(\sqrt{X_3}) < M$. Alors puisque $F(x)$ est une fonction croissante, on aura, pour chaque $x > X_3$,

$$F(x)/F(\sqrt{x}) > 2M - M = M,$$

ce qui établit la relation (24) et par le fait même la partie (ii) (a) du théorème.

7. Une estimation de $\sum_{p\leqslant x} f(p)\psi(x/p, p)$. Pour les cas qui vont suivre, l'expression $\sum_{p\leqslant x} f(p)\psi(x/p, p)$ va jouer un rôle important. Aussi pour en obtenir une estimation précise, on utilise une idée introduite par A. Ivić (communication privée avec le premier auteur) pour évaluer $\sum_{2\leqslant n\leqslant x} 1/\log P(n)$.

Soit d'abord $Z(x)$ une fonction qui satisfait aux deux conditions

$$\lim_{x\to+\infty} Z(x) = +\infty \quad \text{et} \quad Z(x) = o(\log x).$$

Posons ensuite

$$L_2(x) = \exp(K\log x/Z(x)),$$

où K est la constante apparaissant dans l'énoncé du Théorème B. On écrit alors

$$\sum_{p\leqslant x} f(p)\psi\left(\frac{x}{p}, p\right) = \sum_{p\leqslant L_2(x)} f(p)\psi\left(\frac{x}{p}, p\right) + \sum_{L_2(x)<p\leqslant x} f(p)\psi\left(\frac{x}{p}, p\right) \tag{25}$$

$$= \Sigma_A + \Sigma_B.$$

Nous allons montrer que Σ_A est négligeable par rapport à Σ_B, laquelle expression on va estimer avec précision. Pour majorer Σ_A on utilise le Théorème B(a) et on obtient, en supposant (sans perdre la généralité) que L est définie sur $[2, \infty[$,

$$\Sigma_A \ll x \int_2^{L_2(x)} \frac{L(t)}{t\log t} e^{-K(\log x - \log t)/\log t}\,dt$$

$$\ll x \int_2^{L_2(x)} \frac{L(t)}{t\log t} e^{-K\log x/\log t}\,dt$$

$$\ll x \int_{\log 2}^{K\log x/Z(x)} L(e^w) e^{-K\log x/w} \frac{dw}{w}$$

$$= x \int_{\log 2}^{K\log x/Z(x)} e^{-g(w)}\,dw,$$

où

$$g(w) = \frac{K\log x}{w} - \log L(e^w) + \log w = \frac{K\log x}{w} - \int_2^{e^w} \frac{\eta(t)}{t}\,dt + \log w.$$

On constate d'abord que $\exp(-g(w))$ est non décroissante sur $I(x) = [\log 2, K\log x/Z(x)]$. En effet,

$$g'(w) = -\frac{K\log x}{w^2} - \eta(e^w) + \frac{1}{w} = \frac{1}{w} - \frac{K\log x}{w^2} + o(1),$$

laquelle expression est négative sur $I(x)$, puisque $w = o(\log x)$. De ceci, il découle que

$$\Sigma_A \ll x \frac{K \log x}{Z(x)} \exp\left(-g\left(K \log x / Z(x)\right)\right)$$
$$\ll x L\left(e^{K \log x / Z(x)}\right) \exp\left(-Z(x)\right).$$

En choisissant $Z(x) = \log L_*(x)$ où $L_*(x) = \max\left(L(x), 1/L(x)\right)$, on obtient que

(26) $$\Sigma_A \ll \left(x / L_*(x)\right) L\left(e^{K \log x / \log L_*(x)}\right) = o\left(x L(x)\right).$$

Pour l'estimation de Σ_B, on fait appel au Théorème B(b) et on obtient

(27) $$\Sigma_B = \sum_{L_2(x) < p \leqslant x} L(p) \frac{x}{p} l\left(\frac{\log x}{\log p} - 1\right)\left[1 + O\left(\frac{\log \log x}{\log p}\right)\right]$$
$$= x\left[1 + O\left(\frac{\log \log x \log L_*(x)}{\log x}\right)\right] \int_{L_2(x)}^{x} l\left(\frac{\log x}{\log t} - 1\right) \frac{L(t)}{t} d\pi(t)$$
$$= x\left(1 + o(1)\right)\left[1 + O\left(\frac{\log \log x \log L_*(x)}{\log x}\right)\right]$$
$$\times \int_{L_2(x)}^{x} l\left(\frac{\log x}{\log t} - 1\right) \frac{L(t)}{t \log t} dt,$$

où on a fait usage du théorème des nombres premiers. En posant $\dfrac{\log x}{\log t} - 1 = v$ dans la première intégrale à droite de (27), on obtient

(28) $$\Sigma_B = x E(x) \int_0^{(1/2) \log \log x - 1} \frac{l(v)}{v+1} L\left(x^{1/(v+1)}\right) dv,$$

où

(29) $$E(x) = \left(1 + o(1)\right)\left[1 + O\left(\frac{\log \log x \log L_*(x)}{\log x}\right)\right].$$

En utilisant le fait que $l(v) \ll e^{-v \log v}$, on voit que la relation (28) peut s'écrire

(30) $$\Sigma_B = x E(x) \int_0^{\infty} \frac{l(v)}{v+1} L\left(x^{1/(v+1)}\right) dv.$$

En insérant (26) et (30) dans (25), on obtient

(31) $$\sum_{p \leqslant x} f(p) \psi\left(\frac{x}{p}, p\right) = x E(x) \int_0^{\infty} \frac{l(v)}{v+1} L\left(x^{1/(v+1)}\right) dv + o\left(x L(x)\right).$$

Remarquons tout de suite que cette relation (31), même si elle est valable pour toute fonction $L \in \mathscr{L}$, ne nous aurait été d'aucune utilité dans l'estimation de $\sum_{2 \leqslant n \leqslant x} f(P(n))$ dans le cas où $\lambda_L(x) \to +\infty$, puisqu'alors l'intégrale dans (31) est en général difficile à évaluer, ceci étant dû au fait que la fonction L croît trop rapidement pour permettre de dégager $L(x)$ de l'intégrale. C'est par contre ce que nous réussirons à faire dans les cas (ii) (b) (c) et (d).

8. Les cas où $\varrho = 0$ et où $\lambda_L(x)$ tend vers une quantité finie. Considérons d'abord le cas où $\lim_{x \to +\infty} \lambda_L(x) = 0$. En raison du Lemme 5, on a que $L \in \mathscr{L}^*$. Nous allons maintenant montrer qu'à toute fin pratique l'expression $L(x^{1/(v+1)})$ qui apparaît dans l'intégrale à droite de (31) peut être remplacée par $L(x)$. En effet, en posant

$$M(x) = L(e^x) \quad \text{et} \quad y = \log x,$$

on a

(32) $$L\left(x^{1/(v+1)}\right) = L\left(e^{\frac{\log x}{v+1}}\right) = M\left(\frac{\log x}{v+1}\right) = M\left(\frac{y}{v+1}\right).$$

Mais comme $M \in \mathscr{L}$, on peut utiliser le Lemme 1 (avec $\varepsilon = 1/2$) et écrire

(33) $$M\left(\frac{y}{v+1}\right) = M(y)\left(1 + O\left(\frac{1}{\log \varphi(y)}\right)\right)$$

en autant que $1 \leqslant v+1 \leqslant \varphi(y)$ où $\varphi(y) = \exp\left(1/\sqrt{|\eta(\sqrt{y})|}\right)$, cette dernière expression tendant vers $+\infty$ lorsque $y \to +\infty$, soit lorsque $x \to +\infty$. Fort de ces relations (32) et (33), on a

(34) $$\int_0^{\infty} \frac{l(v)}{v+1} L\left(x^{1/(v+1)}\right) dv$$
$$= \int_0^{\varphi(y)-1} \frac{l(v)}{v+1} L\left(x^{1/(v+1)}\right) dv + \int_{\varphi(y)-1}^{\infty} \frac{l(v)}{v+1} L\left(x^{1/(v+1)}\right) dv$$
$$= M(y)\left(1 + O\left(\frac{1}{\log \varphi(y)}\right)\right) \int_0^{\varphi(y)-1} \frac{l(v)}{v+1} dv + \int_{\varphi(y)-1}^{\infty} \frac{l(v)}{v+1} L\left(x^{1/(v+1)}\right) dv.$$

Mais en utilisant les relations (16), on constate que

(35) $$\int_0^{\infty} \frac{l(v)}{v+1} dv = \int_0^{1} \frac{l(v)}{v+1} dv + \int_1^{\infty} \frac{l(v)}{v+1} dv = \int_0^{1} \frac{1}{v+1} dv - \int_1^{\infty} l'(v+1) dv$$
$$= \log 2 - l(v+1)\Big|_1^{\infty} = \log 2 + l(2) = 1.$$

Et comme $M(y) = L(x)$, (34) devient

$$\int_0^\infty \frac{l(v)}{v+1} L(x^{1/(v+1)})\,dv = L(x)(1+o(1)) + \int_{\varphi(\log x)-1}^\infty \frac{l(v)}{v+1} L(x^{1/(v+1)})\,dv.$$

Mais cette dernière intégrale, que l'on dénotera ici par $J_2(x)$, est $o(L(x))$. Pour démontrer ceci, prenons x suffisamment grand et analysons séparément le cas où L est décroissante et celui où L est non-décroissante. Dans le premier cas, puisque $l(v) \ll e^{-v\log v}$, on a

$$\begin{aligned} J_2(x) &\ll \int_{\varphi(\log x)-1}^\infty \frac{l(v)}{v+1}\,dv \ll \int_{\varphi(\log x)-1}^\infty \frac{dv}{v^v(v+1)} \\ &= \int_{\varphi(\log x)}^\infty \frac{dv}{(v-1)^{v-1}v} = \int_{\varphi(\log x)}^\infty \frac{dv}{(v-1)^{v-2}v(v-1)} \\ &\leqslant \frac{1}{(\varphi(\log x)-1)^{\varphi(\log x)-2}} \int_{\varphi(\log x)}^\infty \frac{dv}{v(v-1)}. \end{aligned}$$

Cette dernière intégrale étant $O(1/(\varphi(\log x)-1))$, on a ainsi obtenu que

$$J_2(x) \ll (\varphi(\log x)-1)^{-(\varphi(\log x)-1)}.$$

En posant $L_*(x) = (L(x))^{-1}$, on aura démontré que $J_2(x) = o(L(x))$ si on réussit à prouver que

$$L_*(x) = o((\varphi(\log x)-1)^{(\varphi(\log x)-1)}),$$

lequel estimé découlera facilement à son tour de

(36) $$L_*(x) < e^{\varphi(\log x)}.$$

Mais comme $L_* \in \mathscr{L}^*$, on peut certainement écrire que

$$\eta_{L_*}(x) < 1/(2\log x),$$

ce qui entraîne que

$$\begin{aligned} \varphi(\log x) &= \varphi_L(\log x) = \varphi_{L_*}(\log x) = \exp(1/\sqrt{\eta(\sqrt{\log x})}) \\ &> e^{\sqrt{\log\log x}} > \log\log x > \log L_*(x), \end{aligned}$$

la dernière inégalité découlant du fait que L_* est à croissante très lente. Mais ceci démontre (36) et par le fait même que, dans ce cas, $J_2(x) = o(L(x))$. Dans le deuxième cas, c'est-à-dire si L est non-décroissante, on aura

$$\begin{aligned} J_2(x) &\ll \int_{\varphi(\log x)-1}^\infty \frac{l(v)}{v+1} L(x^{1/(v+1)})\,dv \\ &\ll M\left(\frac{\log x}{\varphi(\log x)}\right) \int_{\varphi(\log x)-1}^\infty \frac{l(v)}{v+1}\,dv = o\left(M\left(\frac{\log x}{\varphi(\log x)}\right)\right), \end{aligned}$$

en raison de (35). Mais la relation (33) est encore applicable avec $v+1 = \varphi(\log x)$ et $y = \log x$, ce qui nous permet d'écrire

$$M\left(\frac{\log x}{\varphi(\log x)}\right) = M(\log x)\left(1+O\left(\frac{1}{\log\varphi(\log x)}\right)\right) = L(x)(1+o(1)).$$

D'où

$$J_2(x) = o(L(x)(1+o(1))) = o(L(x)),$$

tel que requis. Il s'ensuit donc que (34) devient

$$\int_0^\infty \frac{l(v)}{v+1} L(x^{1/(v+1)})\,dv = L(x)(1+o(1)).$$

Et en insérant cette estimation dans (31), on obtient

$$\sum_{p\leqslant x} f(p)\psi\left(\frac{x}{p}, p\right) = xL(x) + o(xL(x)),$$

ce qui démontre (8). Par ailleurs comme

$$\begin{aligned} \sum_{p\leqslant x} f(p)\left[\frac{x}{p}\right] &= x\sum_{p\leqslant x}\frac{f(p)}{p} + O\Big(\sum_{p\leqslant x} f(p)\Big) \\ &= (1+o(1))\,x\int_2^x \frac{L(t)}{t\log t}\,dt + O\left(\int_2^x \frac{L(t)}{\log t}\,dt\right) \\ &\sim x\int_2^x \frac{L(t)}{t\log t}\,dt, \end{aligned}$$

(9) est démontrée. Ceci complète la démonstration de la partie (ii) (c).

Nous revenons donc à la partie (ii) (b), soit le cas où $\lambda_L(x) \sim c$ avec $c > 0$. On pose alors $\lambda(x) = c + \varepsilon(x)$ où $\varepsilon(x) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$. Puisque $\lambda(x) = \eta(x)\log x$, on a

(37) $$\begin{aligned} L(x) &= e^v \exp\int_B^x \frac{\eta(t)}{t}\,dt \\ &= e^v \exp\left(\int_B^x \frac{c}{t\log t}\,dt + \int_B^x \frac{\varepsilon(t)}{t\log t}\,dt\right) \\ &= e^v \exp(c(\log\log x - \log\log B))\,L_0(x) \\ &= c_3(\log x)^c L_0(x) \end{aligned}$$

pour une certaine constante $c_3 > 0$ et pour une certaine fonction $L_0 \in \mathscr{L}^*$, où on a fait usage du Lemme 5. Ainsi

$$L(\sqrt{x}) = c_3 2^{-c}(\log x)^c L_0(\sqrt{x}) \sim c_3 2^{-c}(\log x)^c L_0(x).$$

Parallèlement, en posant $M(x) = L_0(e^x)$ et en faisant un changement de variable approprié, on obtient, en utilisant le Lemme 2,

$$F_L(x) = F(x) = \int_2^x \frac{c_3 (\log u)^c L_0(u)}{u \log u} du = c_3 \int_2^x \frac{(\log u)^{c-1} L_0(u)}{u} du$$

$$= c_3 \int_{\log 2}^{\log x} v^{c-1} M(v)\, dv \sim c_3 c^{-1} (\log x)^c L_0(x) = c^{-1} L(x),$$

ce qui démontre (7). D'autre part, la relation (31) est toujours valable et l'intégrale qui est dans son membre de droite est égale à

$$c_3 (\log x)^c \int_0^\infty \frac{l(v)}{(v+1)^{c+1}} L_0(x^{1/(v+1)})\, dv,$$

où on a fait usage de la représentation de $L(x)$ donnée en (37). Enfin en reprenant le même genre de raisonnement que celui entrepris pour simplifier l'expression $\int_0^\infty l(v)(v+1)^{-1} L(x^{1/(v+1)})\, dv$, la relation (31) devient

$$\sum_{p \leqslant x} f(p)\, \psi\left(\frac{x}{p}, p\right) = (1+o(1))\, x L(x) \int_0^\infty \frac{l(v)}{(v+1)^{c+1}} dv, \tag{38}$$

d'où en combinant (18) et (38), on déduit (6). La partie (ii) (b) se trouve démontrée.

Si maintenant $\lim_{x \to \infty} \lambda_L(x) = c$ où $c < 0$, on obtient facilement l'estimation (10) soit en suivant le même raisonnement que ci-haut, puisque nulle part nous avons utilisé le fait que c était positif. Par ailleurs (11) est facilement vérifiée si l'on fait appel à la représentation de $L(x)$ donnée en (33) et que l'on constate qu'elle entraîne la convergence de $\sum_p f(p)/p$. D'où la conclusion (ii) (d)..

9. Le cas où $\lambda_L(x)$ tend vers $-\infty$. On constate d'abord que la relation (13) est facilement vérifiée. Le point le plus délicat réside donc dans la démonstration de (12). On a d'après (18), (25) et (31), que

$$\sum_{2 \leqslant n \leqslant x} f(P(n)) = x E(x) \int_0^\infty \frac{l(v)}{v+1} L(x^{1/(v+1)})\, dv + o(xL(x)). \tag{39}$$

Nous procédons dans un premier temps à l'évaluation de l'intégrale qui apparaît dans (39). Dénotons la par $J_3(x)$. Puisque L est décroissante et que $l(v) \ll e^{-v \log v}$, on peut écrire

$$J_3(x) = (1+o(1)) \int_0^{\log x - 1} \frac{l(v)}{v+1} L(x^{1/(v+1)})\, dv = (1+o(1))\, J_4(x), \tag{40}$$

disons. En posant $w = v+1$, on a

$$J_4(x) = \int_1^{\log x} \frac{L(x^{1/w})\, l(w-1)}{w} dw = \int_1^{\log x} \frac{l(w-1)}{L_*(x^{1/w})} \frac{dw}{w} = \int_1^{\log x} e^{-h(w)}\, dw,$$

où

$$\begin{aligned} h(w) &= \log L_*(x^{1/w}) - \log l(w-1) + \log w \\ &= \log L_*(x^{1/w}) + (1+o(1))(w-1)\log(w-1) + \log w \\ &= (1+o(1))(\log L_*(x^{1/w}) + w \log w) \\ &= (1+o(1))\, h_0(w). \end{aligned}$$

Si on peut trouver le point $w_0 = w_0(x)$ pour lequel la fonction h_0 atteint son minimum, alors on en déduira que

$$\frac{1}{e^{\log L_*(x^{1/w_0(x)}) + w_0(x) \log w_0(x)}} \leqslant J_4(x) \leqslant \frac{\log x}{e^{\log L_*(x^{1/w_0(x)}) + w_0(x) \log w_0(x)}}. \tag{41}$$

Cherchons donc le minimum de $h_0(w)$. On a, en posant $\lambda_+(x) = -\lambda(x)$,

$$h_0'(w) = \frac{\lambda_+(x^{1/w})}{x^{1/w} \log x^{1/w}} x^{1/w} \left(-\frac{1}{w^2}\right) \log x + 1 + \log w.$$

Ainsi $h_0'(w) = 0$ entraîne que $-\lambda_+(x^{1/w})/w = -\log w$, c'est-à-dire

$$\lambda_+(x^{1/w}) = w \log w. \tag{42}$$

Soit donc $w_0 = w_0(x)$ la solution de (42). Alors pour cette valeur de w_0, (41) est vérifiée. On observe maintenant que

$$w_0(x) < \sqrt{\log x}. \tag{43}$$

En effet, puisque, par hypothèse, $\lambda_+(x) = o(\log x)$, on a que

$$\lambda_+(x^{1/w_0}) < \frac{1}{w_0} \log x,$$

$$w_0 \log w_0 < \frac{1}{w_0} \log x,$$

$$w_0 < w_0 \log w_0 < \frac{1}{w_0} \log x,$$

ce qui démontre (43). Ainsi

$$\log L_*(x^{1/w_0}) \geqslant \int_{\log x}^{x^{1/w_0}} \frac{\lambda_+(t)}{t \log t} dt \geqslant \lambda_+(\log x) \int_{\log x}^{x^{1/w_0}} \frac{dt}{t \log t}$$

$$= \lambda_+(\log x) \left(\log\left(\frac{1}{w_0} \log x\right) - \log \log \log x\right);$$

mais en raison de (43), cette dernière expression est supérieure à

$$\lambda_+(\log x)(\log(\sqrt{\log x})-\log\log\log x)=\lambda_+(\log x)(\tfrac{1}{2}\log\log x-\log\log\log x)$$
$$\gg \lambda_+(\log x)\log\log x.$$

De ceci on déduit que

(44) $$\log x=\exp(\log\log x)\ll L_*(x^{1/w_0(x)})^{1/\lambda_+(\log x)}=L_*(x^{1/w_0(x)})^{o(1)}.$$

En substituant (44) dans (41), on a que

$$J_4(x)=L(x^{1/w_0(x)})^{1+o(1)}\exp(-w_0(x)\log w_0(x)),$$

laquelle équation se ramène à

(45) $$J_4(x)=L(x^{1/w_0(x)})^{1+o(1)}.$$

En effet, en posant $\eta_+(t)=-\eta(t)$, on a puisque $\eta_+(t)$ est décroissante,

$$\int_2^x\frac{\lambda_+(t)}{t\log t}dt=\int_2^x\frac{\eta_+(t)}{t}dt>\eta_+(x)\log x=\lambda_+(x);$$

d'où

$$w_0(x)\log w_0(x)=\lambda_+(x^{1/w_0(x)})<\int_2^{x^{1/w_0(x)}}\frac{\lambda_+(t)}{t\log t}dt=\log L_*(x^{1/w_0(x)}),$$

ce qui prouve (45). De la définition de $E(x)$ donnée par (29), il découle facilement que

(46) $$E(x)=O(\log\log x)=L(x^{1/w_0(x)})^{o(1)}.$$

En tenant compte de (40), (45) et (46), la relation (39) devient

(47) $$\sum_{2\leqslant n\leqslant x}f(P(n))=xL(x^{1/w_0(x)})^{1+o(1)}+o(xL(x)).$$

Et puisque L est décroissante, le terme $xL(x)$ est facilement absorbé par le premier terme à droite de (47). Ceci termine la démonstration de (12) et par le fait même de la partie (ii) (e).

10. Le cas où $\varrho<0$. Soit $R(x)=x^{\varrho}L(x)$ où $\varrho<0$ et $L\in\mathscr{L}$. En posant $\eta=-\varrho$, $\eta^*=\max\{1,\eta\}$ et $L_0(x)=\sqrt{\log x\log\log x}$, on obtient

$$\sum_{2\leqslant n\leqslant x}f(P(n))=\sum_{p\leqslant x}\frac{L(p)}{p^{\eta}}\psi\left(\frac{x}{p},p\right)$$
$$=\sum_{p\leqslant e^{(\log\log x)^{5/3}}}+\sum_{e^{(\log\log x)^{5/3}}<p\leqslant e^{L_0(w)/4\eta^*}}$$

$$+\sum_{e^{L_0(x)/4\eta^*}<p\leqslant e^{4\eta^*L_0(x)}}+\sum_{e^{4\eta^*L_0(x)}<p\leqslant x}$$
$$=\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3+\Sigma_4.$$

Nous allons montrer que

(48) $$\Sigma_3=xe^{-\sqrt{2\eta}L_0(x)(1+o(1))},$$

et que Σ_1, Σ_2 et Σ_4 sont négligeables par rapport à Σ_3. Cela sera suffisant pour démontrer (14). Et puisque (15) est évident alors cela achèvera la démonstration de la partie (iii) et du même coup du Théorème. Commençons par estimer dans l'ordre, Σ_1, Σ_2 et Σ_4.

En utilisant le Théorème B(a), on a que

$$\Sigma_1\ll xe^{-K\log x/(\log\log x)^{5/3}}=o(e^{-\sqrt{2\eta}L_0(x)}).$$

En faisant appel à la partie (b) du même Théorème, on obtient

$$\Sigma_2\ll x\int_{e^{(\log\log x)^{5/3}}}^{e^{L_0(x)/4\eta^*}}\frac{L(t)}{t^{1+\eta}\log t}e^{-(\log x/\log t)(\log\log x-\log\log t)}dt.$$

Comme $t<e^{L_0(x)/4\eta^*}$ on a que

$$-\frac{\log x}{\log t}(\log\log x-\log\log t)<-2\eta^*L_0(x)$$

et ainsi

$$\Sigma_2\ll xe^{-2\eta^*L_0(x)}\int_{e^{(\log\log x)^{5/3}}}^{e^{L_0(x)/4\eta^*}}\frac{L(t)}{t^{1+\eta}\log t}dt=o(xe^{-2\eta^*L_0(x)})=o(xe^{-\sqrt{2\eta}L_0(x)}).$$

Par ailleurs, puisque $L(t)<t^{\eta/2}$ pour t assez grand, on a

$$\Sigma_4\ll x\sum_{e^{4\eta^*L_0(w)}<p\leqslant x}\frac{L(p)}{p^{1+\eta}}<x\int_{e^{4\eta^*L_0(x)}}^{\infty}\frac{du}{u^{1+\eta/2}}$$
$$\ll xe^{-2\eta^*L_0(x)}=o(xe^{-\sqrt{2\eta}L_0(x)}).$$

Il nous suffit donc maintenant de démontrer (48). Mais

$$\Sigma_3=(1+o(1))x\int_{e^{L_0(x)/4\eta^*}}^{e^{4\eta^*L_0(x)}}\frac{L(t)}{t^{1+\eta}\log t}l\left(\frac{\log x}{\log t}-1\right)dt$$

et en posant $\log t=w$, on obtient

$$\Sigma_3=(1+o(1))x\int_{L_0(x)/4\eta^*}^{4\eta^*L_0(x)}\frac{L(e^w)}{we^{w\eta}}l\left(\frac{\log x}{w}-1\right)dw=(1+o(1))xJ_5(x).$$

Soit maintenant

(49) $$f_0(x) = \log\left|\frac{L(e^w)}{we^{\eta w}}\, l\left(\frac{\log x}{w}-1\right)\right|,$$

de sorte que

$$J_5(x) = \int_{L_0(x)/4\eta^*}^{4\eta^* L_0(x)} e^{f_0(w)}\, dw.$$

Nous allons montrer que f_0 atteint son maximum en

(50) $$w = w_0 = (1+o(1))\frac{1}{\sqrt{2\eta}} L_0(x),$$

auquel cas on aura, à cause des représentations (56) et (57),

(51) $$f_0(w_0) = -\sqrt{2\eta}\, L_0(x)(1+o(1)).$$

On pourra conclure de ceci que

$$e^{-\sqrt{2\eta}\, L_0(x)(1+o(1))} < J_5(x) < \left(4\eta^* - \frac{1}{4\eta^*}\right) L_0(x)\, e^{-\sqrt{2\eta}\, L_0(x)(1+o(1))}.$$

D'où

(52) $$J_5(x) = e^{-\sqrt{2\eta}\, L_0(x)(1+o(1))}.$$

De (49), on a

(53) $$f_0(w) = -\log w - \eta w + \log L(e^w) + \log l\left(\frac{\log x}{w}-1\right)$$
$$= -\eta w(1+o(1)) + \log l\left(\frac{\log x}{w}-1\right),$$

puisque les expressions $\log w$ et $\log L(e^w)$ sont toutes deux $o(w)$. De l'estimation bien connue

$$\log l(u) = (1+o(1))\, u \log u,$$

il découle que

(54) $$\log l\left(\frac{\log x}{w}-1\right) = (1+o(1))\frac{\log x}{w}(\log\log x - \log w).$$

Par ailleurs, comme $w \in [L_0(x)/(4\eta^*),\, 4\eta^* L_0(x)]$, on a

(55) $$\log w = (\tfrac{1}{2}+o(1))\log\log x.$$

Ainsi en tenant compte de (54) et (55), la relation (53) devient

(56) $$F_0(w) = ((+o(1))\, f(w),$$

où

(57) $$f(w) = -\eta w - \frac{1}{2}\frac{\log x \log\log x}{w}.$$

Et $f'(w) = 0$ veut dire qué $-\eta + \frac{1}{2w^2}\log x \log\log x = 0$, soit lorsque $w = \frac{1}{\sqrt{2\eta}} L_0(x)$, ce qui démontre successivement (50), (51) et (52) et par le fait même la partie (iii) du Théorème.

11. Applications.

(i) La relation (2) démontrée par De Koninck et Ivić [4] est en fait une conséquence de la relation (4).

(ii) La formule (14) donne une relation asymptotique pour $\sum_{2 \leq n \leq x} 1/P(n)$ qui est toutefois plus faible que celle obtenue par Erdős, Ivić et Pomerance [6].

(iii) L'estimé $\sum_{2 \leq n \leq x} \log P(n) \sim ax\log x$, où $a = \int_0^\infty l(v)(v+1)^{-2}\, dv$, obtenue par N.G. De Bruijn [3] s'obtient en prenant $c = 1$ dans notre relation (7).

(iv) Puisque $\int_0^\infty l(v)\, dv = e^\gamma$ (voir [2]), où γ désigne la constante d'Euler, alors en utilisant la relation (13), on obtient la formule asymptotique

$$\sum_{2 \leq n \leq x} \frac{1}{\log P(n)} \sim e^\gamma \frac{x}{\log x},$$

qui découle de

$$\sum_{2 \leq n \leq x} \frac{1}{n \log P(n)} = e^\gamma \log\log x + O(\log\log\log x)$$

laquelle équation a été obtenue par G.J. Rieger [9]. Récemment cette dernière formule a été améliorée par De Koninck et Sitaramachandrarao [5].

Remerciements. Les auteurs remercient l'arbitre pour ses remarques constructives.

Références

[1] K. Alladi et P. Erdős, *On an additive arithmetic function*, Pacific J. Math. 71 (1977), 275–294.
[2] J.D. Bovey, *On the size of prime factors of integers*, Acta Arith. 33 (1977), 65–80.

[3] N.G. De Bruijn, *On the number of positive integers $\leqslant x$ and free of prime factors $> y$*, Koninkl. Nederl. Akademie Van Wetenschappen, Series A, 54 (1951), 49–60.

[4] J.M. De Koninck et A. Ivić, *The distribution of the average prime divisor of an integer*, Arch. Math. 43 (1984), 37–43.

[5] J.M. De Koninck et R. Sitaramachandrarao, *Sums involving the largest prime divisor of an integer*, Acta Arith. 48 (1987), 1–8.

[6] P. Erdős, A. Ivić et C. Pomerance, *On sums involving reciprocals of the largest prime factor of an integer*, Glasnik Matematicki 2 (1986), 27–44.

[7] A. Hildebrand, *On the number of positive integers $\leqslant x$ and free of prime factors $> y$*, J. Number Theory 22 (1986), 289–307.

[8] J. Karamata, *Sur un mode de croissance régulière des fonctions*, Mathematica (Cluj) 4 (1930), 38–53.

[9] G.J. Rieger, *On two arithmetic sums*, Notices of A.M.S., 74t-A-177.

[10] E. Seneta, *Regularly varying functions*, LNM 508, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1976.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ LAVAL
Québec, G1K 7P4
Canada

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC
Chicoutimi, G7H 2B1
Canada

Reçu le 2.1.1987
et dans la forme modifiée 14.7.1987 (1696)